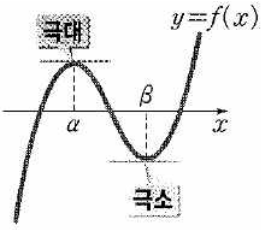
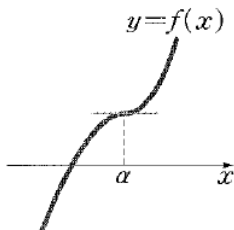
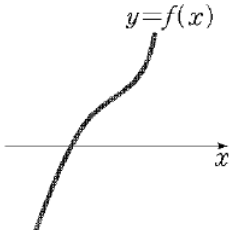


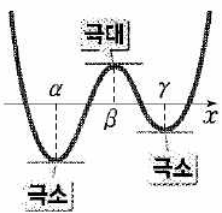
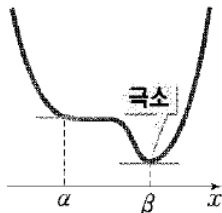
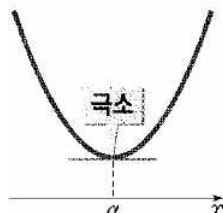
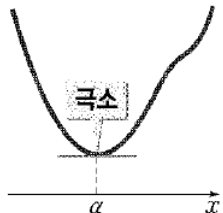
1 삼차함수가 극값을 가질 조건과 갖지 않을 조건

삼차함수 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a > 0$)의 그래프의 개형은 방정식 $f'(x) = 0$ 의 근의 개수에 따라 다음과 같이 세 가지 형태로 나눌 수 있다.

근의 개수	서로 다른 두 실근 α, β	중근 α	허근
판별식	$f'(x) = 0$ 의 판별식 $D > 0$	$f'(x) = 0$ 의 판별식 $D = 0$	$f'(x) = 0$ 의 판별식 $D < 0$
그래프의 개형			
특징	극댓값 1개, 극솟값 1개	극값은 없다.	극값은 없다.
조건	$f(x)$ 가 극값을 가질 조건은 $f'(x) = 0$ 의 판별식 $D > 0$	$f(x)$ 가 극값을 갖지 않을 조건은 $f'(x) = 0$ 의 판별식 $D \leq 0$	

2 사차함수가 극값을 가질 조건

사차함수 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($a > 0$)의 그래프의 개형은 방정식 $f'(x) = 0$ 의 근의 개수에 따라 다음과 같이 네 가지 형태로 나눌 수 있다.

근의 개수	서로 다른 세 실근 α, β, γ	중근 α 와 한 실근 β	삼중근 α	한 실근 α 와 두 허근
그래프의 개형				
특징	극댓값 1개 극솟값 2개	극댓값은 없다. 극솟값 1개	극댓값은 없다. 극솟값 1개	극댓값은 없다. 극솟값 1개
조건	$f(x)$ 가 극댓값을 가질 조건은 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가질 때이다.			

개념 Plus

2. 사차함수가 극값을 갖지 않을 조건

사차함수 $f(x)$ 가 극댓값을 갖지 않을 조건은 '2. 사차함수가 극댓값을 가질 조건'에서 방정식 $f'(x) = 0$ 이 중근과 한 실근, 삼중근, 한 실근과 두 허근을 가질 때이다. 따라서 사차함수 극댓값을 갖지 않을 조건을 구하려면 이 세 가지 조건을 모두 구하여 그 범위를 합해야 하는 번거로움이 따른다. 하지만 사차함수가 극값을 가질 조건 즉,

$f'(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가질 조건을 구한 후, 그 결과를 부정하는 방법을 이용하면 쉽게 해결 할 수 있다.

예) 함수 $f(x) = x^4 - 4x^3 + ax^2$ 이 극값을 가질 조건이 「 $a < 0$ 또는 $0 < a < \frac{9}{2}$ 」일 때, 함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않을 조건은

「 $a < 0$ 또는 $0 < a < \frac{9}{2}$ 」의 부정이므로 「 $a = 0$ 또는 $a \geq \frac{9}{2}$ 」가 된다.

필수예제 1

삼차함수가 극값을 가질 조건

다음을 각각 구하여라.

- (1) 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + 3ax + 2$ 가 극값을 갖지 않도록 하는 실수 a 의 값의 범위
- (2) 함수 $f(x) = 3x^3 + (a+2)x^2 + ax + 1$ 이 극값을 갖지 않도록 하는 실수 a 의 값의 범위

유제

- 1 함수 $f(x) = x^3 - ax^2 + (a^2 - 2a)x$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 갖기 위한 실수 a 의 값의 범위
- 2 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 4$ 가 극값을 갖도록 하는 a 의 값의 범위를 구하여라.
- 3 함수 $f(x) = x^3 - ax^2 + (a^2 - 2a)x$ 는 극댓값과 극솟값을 모두 갖고, 함수 $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + (5a - 4)x + 2$ 는 극값을 갖지 않을 때, 모든 정수 a 의 값의 합을 구하여라.
- 4 삼차함수 $f(x) = (p-2)x^3 + 3(q-1)x^2 - 3px + 5$ 가 극댓값과 극솟값을 갖지 않을 때, 점 (p, q) 가 나타내는 영역의 넓이를 구하여라. (단, p, q 는 실수)

필수예제 2

삼차함수가 주어진 구간에서 극값을 가질 조건

다음을 각각 구하여라.

- (1) 함수 $f(x) = x^3 + 3(a-1)x^2 - 3(a-3)x + 5$ 가 $-1 < x < 1$ 에서 극댓값과 극솟값을 갖기 위한 실수 a 의 값의 범위
- (2) 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 4$ 가 $x > 0$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 갖기 위한 실수 a 의 값의 범위

유제

- 5 다음을 각각 구하여라.
 - (1) 함수 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + (3a-2)x - \frac{1}{2}$ 이 $0 < x < 1$ 에서 극댓값을 갖고, $x > 1$ 에서 극솟값을 갖기 위한 실수 a 의 값의 범위
 - (2) 함수 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 9x - 10$ 이 $-2 < x < 2$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가질 때, 실수 a 의 값의 범위
- 6 함수 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - kx^2 + (k^2 - 1)x + 10$ 이 $-2 < x < -1$ 에서 극댓값, $x > -1$ 에서 극솟값을 가지기 위한 실수 k 의 값의 범위를 구하여라.
- 7 함수 $f(x) = 3x^3 - (k+2)x^2 + kx + 10$ 이 $x > 0$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 갖기 위한 실수 k 의 값의 범위를 구하여라.
- 8 함수 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3x$ 가 $-1 < x < 2$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가질 때, 상수 a 의 값의 범위를 구하여라.

필수예제 3

사차함수가 극값을 가질 조건

다음을 각각 구하여라.

- (1) 함수 $f(x) = x^4 + 4x^3 + 2ax^2 + 5$ 가 극댓값을 갖기 위한 실수 a 의 값의 범위
- (2) 함수 $f(x) = x^4 + 2(-1)x^2 + 4ax + 3$ 이 극댓값을 갖지 않을 때, 실수 a 의 값의 범위

유제

9 다음을 각각 구하여라.

- (1) 함수 $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 6ax^2$ 이 극댓값을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위
- (2) 함수 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2ax^2 + 1$ 이 극댓값을 갖지 않을 때, 실수 a 의 값의 범위

10 함수 $f(x) = x^4 + 2x^3 - ax^2 + 5$ 가 극댓값을 갖기 위한 a 의 값의 범위를 구하여라.

11 함수 $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 - (a-1)x^2 + 2ax$ 가 극솟값을 갖기 위한 실수 a 의 값의 범위를 구하여라.

12 함수 $f(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2$ 이 극댓값을 갖지 않도록 하는 실수 a 의 값의 범위를 구하여라.

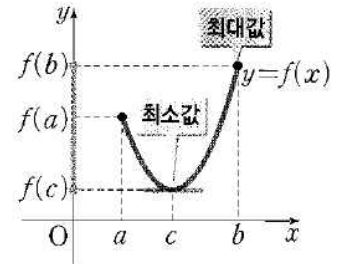
13 함수 $f(x) = -x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 2(a-2)x^2 + 8ax$ 가 극솟값을 갖지 않도록 하는 실수 a 의 값의 범위를 구하여라.

05 함수의 최댓값과 최솟값

2. 도함수의 활용

1 최대·최소의 정리

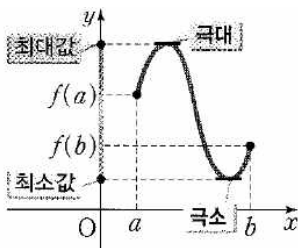
함수 $f(x)$ 가 폐구간 $[a, b]$ 에서 연속이면 이 구간에서 $f(x)$ 는 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.



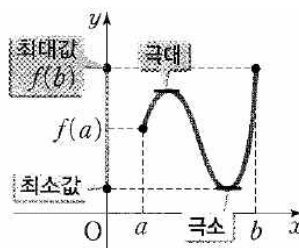
2 다항함수의 최댓값과 최솟값

다항함수 $f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 극값을 가질 때,

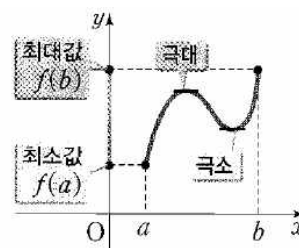
- (1) $f(x)$ 의 최댓값 : 극댓값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값
- (2) $f(x)$ 의 최솟값 : 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 작은 값



[그림 1]



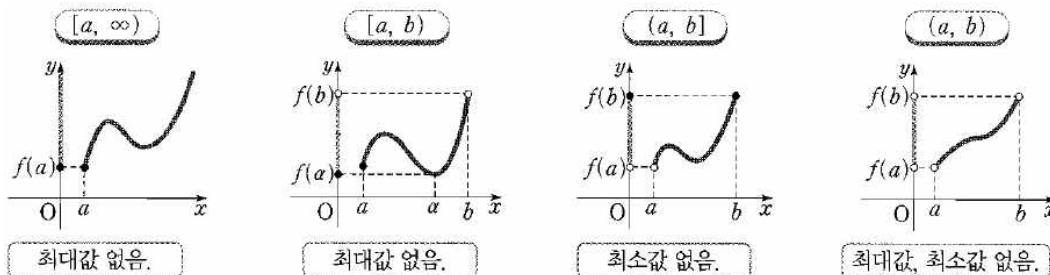
[그림 2]



[그림 3]

개념 Plus

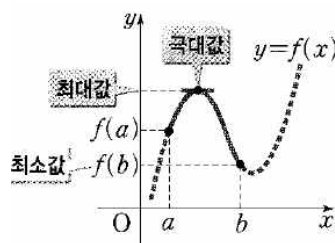
※ 폐구간이 아닌 구간에서의 최댓값과 최솟값



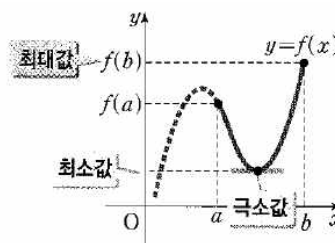
폐구간이 아닌 구간에서는 최댓값 또는 최솟값이 존재하지 않을 수도 있다.

※ 극값이 하나뿐일 때의 함수의 최댓값과 최솟값

(가) 극댓값만 있는 경우



(나) 극솟값만 있는 경우



$f(x)$ 의 극댓값이 최댓값
양 끝값 중 작은 값이 최솟값

$f(x)$ 의 극솟값이 최솟값
양 끝값 중 큰 값이 최댓값

연속함수 $f(x)$ 의 구간 $[a, b]$ 에서 극값이 오직 하나 존재할 때

극값이 극댓값 $\Rightarrow$ (극댓값) = (최댓값)

극값이 극솟값 $\Rightarrow$ (극솟값) = (최솟값)

필수예제 1 함수의 최댓값과 최솟값 구하기

다음 함수의 주어진 구간에서 최댓값과 최솟값을 구하여라.

- (1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ $[-2, 2]$
 (2) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2$ $[-2, 1]$

유제

1 다음 함수의 주어진 구간에서 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $f(x) = -x^3 + 3x^2$ $[-2, 3]$

(2) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3$ $[-3, 1]$

(3) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ $[0, \infty)$

(4) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 1$ $(-\infty, \infty)$

2 함수 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 18$ 의 최솟값은?

- ① -20 ② -18 ③ -16
 ④ -14 ⑤ -12

3 구간 $[-2, 3]$ 에서 함수 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2$ 의 최댓값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

4 함수 $f(x) = x^4 - 4x + a$ 의 최솟값이 -1일 때, 상수 a 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0
 ④ 1 ⑤ 2

필수예제 2 미정계수를 포함한 함수의 최댓값과 최솟값

구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x) = ax^3 - 6ax + b$ 의 최댓값이 3이고 최솟값이 -29일 때, 양수 a, b 의 값을 구하여라.

유제

5 구간 $[-1, 4]$ 에서 함수 $f(x) = 3ax^2 - ax^3$ 의 최솟값이 -4일 때, $f(x)$ 의 최댓값을 구하여라. (단, $a > 0$)

6 $1 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $f(x) = ax^4 - 4ax^3 + b$ 의 최댓값이 9, 최솟값이 0일 때, 상수 a, b 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

7 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ 가 $x = 2$ 에서 극솟값 -2를 가질 때, 함수 $f(x)$ 의 구간 $[0, 3]$ 에서의 최댓값을 구하여라.

8 구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x) = ax^3 - 6ax^2 + b$ 가 최댓값을 가질 때의 x 의 값은? (단, $a > 0$)

- ① -1 ② 0 ③ $\frac{1}{3}$
 ④ 1 ⑤ 2

9 함수 $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + a$ 가 구간 $[-2, 2]$ 에서 최솟값 -37을 가질 때, $f(x)$ 의 최댓값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

10 구간 $[-2, 4]$ 에서 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + a$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 -12일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

11 구간 $[-2, 3]$ 에서 삼차함수

$f(x) = ax^3 - 3ax^2 + b$ ($a > 0$)의 최댓값이 9, 최솟값이 -11일 때, a, b 의 값을 구하여라.

12 구간 $[1, 4]$ 에서 함수 $f(x) = -ax^4 + 4ax^3 + b (a > 0)$ 의 최댓값이 4이고 최솟값이 1일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

13 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 10$ 이 $x=1$ 에서 극댓값 5를 가질 때, 함수 $f(x)$ 의 구간 $[-1, 3]$ 에서의 최솟값을 구하여라.

필수예제 3 치환을 이용한 함수의 최대·최소(1)

$0 \leq x \leq 2$ 일 때,
 $f(x) = (x^2 - 2x + 3)^3 - 3(x^2 - 2x + 3)^2 - 1$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

유제

14 $x \geq 0$ 일 때, 함수
 $f(x) = (x^2 - 4x + 4)^3 - 6(x^2 - 4x + 4)^2$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

15 $0 \leq x \leq 4$ 일 때,
 $f(x) = (x^2 - 4x + 2)^3 - 12(x^2 - 4x + 2) + 1$
 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

16 $1 \leq x \leq 3$ 일 때,
 $f(x) = -(x^2 - 2x - 1)^3 - 3(x^2 - 2x - 1) + 10$
 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

필수예제 4 치환을 이용한 함수의 최대·최소(2)

함수 $f(x) = 4\sin^3 x - 9\cos^2 x - 12\sin x + 10$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

유제

17 함수 $f(x) = \sin x \cos^2 x$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

18 함수 $f(x) = \sin^3 x + 3\cos^2 x - 1$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

- ① -4 ② -2 ③ 0
 ④ 2 ⑤ 4

19 $0 \leq x \leq \pi$ 일 때, 함수
 $f(x) = 2\cos^3 x + 3\sin^2 x - 12\cos x + 1$
 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

20 함수 $f(x) = 4\sin^3 x + 3\cos^2 x + 2$ 의 최댓값은 M , 최솟값은 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값은?
 ① -4 ② -2 ③ 2
 ④ 4 ⑤ 6

21 함수 $f(x) = \sin x \cos^2 x$ 의 최댓값은?

- ① $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{9}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{6}$
 ④ $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

필수예제 5

여러 가지 함수의 최댓값과 최솟값

$2x + y = 12$ 일 때, $\log_2 x + \log_4 y$ 의 최댓값을 구하여라.

유제

22 $x + 3y = 9$ 일 때, $2\log_6 x + \log_6 y$ 의 최댓값을 구하여라.

23 $x > 0$ 이고, $2x - y = 2$ 일 때, $x^2 y$ 의 최솟값을 구하여라.

24 실수 x, y 가 $x \geq 0, y \geq 0, x^2 - x + y - 6 = 0$ 을 만족할 때,
 $xy - 5x + 8$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

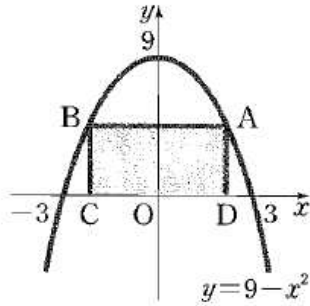
25 등식 $x^2 + 3y^2 = 9$ 를 만족시키는 실수 x, y 에 대하여
 $x^2 + xy^2$ 의 최솟값은?
① $-\frac{5}{3}$ ② -1 ③ $-\frac{1}{3}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ 2

06 최대 · 최소의 활용

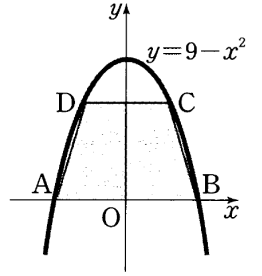
2. 도함수의 활용

필수예제 1 최대 · 최소의 활용(1) ; 넓이

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=9-x^2$ 과 x 축 위에 직사각형 ABCD의 네 꼭지점이 있다고 할 때, 직사각형 ABCD의 넓이의 최댓값을 구하여라.



4 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=9-x^2$ 과 x 축의 교점을 A, B라 하자 선분 AB와 이 곡선으로 둘러싸인 부분에 사다리꼴 ABCD가 내접할 때, 이 사다리꼴의 넓이의 최댓값을 구하여라.

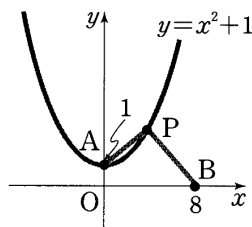


5 두 점 $O(0, 0)$, $A(10, 0)$ 에 대하여 점 P가 포물선 $y=x^2+1$ 위를 움직일 때, $\overline{OP}^2 + \overline{AP}^2$ 의 최솟값을 구하여라.

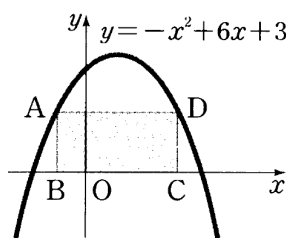
유제

1 좌표평면에서 두 곡선 $y=x^2-3$ 과 $y=3-x^2$ 으로 둘러싸인 부분에 내접하고, 한 변이 x 축에 평행한 직사각형의 최대넓이를 구하여라.

2 두 점 $A(0, 1)$, $B(8, 0)$ 과 포물선 $y=x^2+1$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 최솟값을 구하여라.

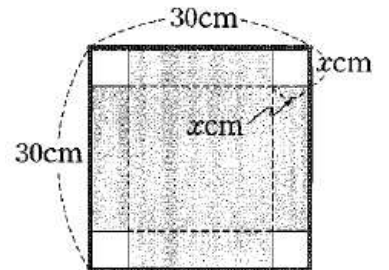


3 오른쪽 그림과 같이 포물선 $y=-x^2+6x+3$ 과 x 축 위에 직사각형 ABCD의 네 꼭지점이 있다. 직사각형 ABCD의 넓이의 최댓값을 구하여라.



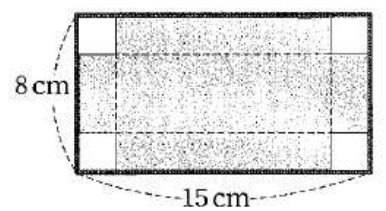
필수예제 2 최대 · 최소의 활용 (2) ; 부피

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 30cm인 정사각형 모양의 종이의 네 모퉁이에서 한 변의 길이가 xcm인 정사각형을 잘라 내고 남은 부분을 접어서 뚜껑이 없는 직육면체 모양의 상자를 만들려고 한다. 이 상자의 부피의 최댓값을 구하여라.

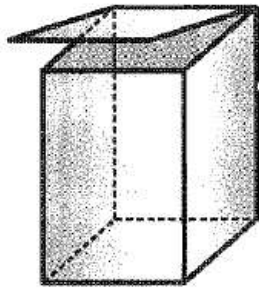


유제

6 오른쪽 그림과 같이 가로와 세로가 15cm, 8cm인 직사각형 모양의 양철판의 네 모퉁이에서 크기가 같은 정사각형을 잘라내고 남은 부분으로 뚜껑이 없는 상자를 만들려고 한다. 이 상자의 부피가 최대가 되도록 할 때, 잘라 낼 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.



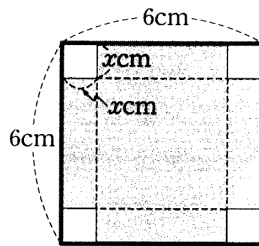
- 7 오른쪽 그림과 같이 밑면이 정사각형인 직육면체 모양의 선물 포장용 상자를 만들려고 한다. 옆면과 밑면을 만드는 데는 1cm^2 당 10원, 윗면을 만드는 데는 1cm^2 당 20원의 비용이 든다고 할 때, 200원으로 만들 수 있는 상자의 되게 부피를 구하여라.



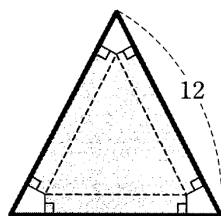
- 8 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 반원 속에 한 변이 지름과 평행하고 한 꼭지점이 지름 위에 있는 삼각형 ACB 를 그릴 때, 삼각형 ACB 의 넓이의 최댓값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

- 9 한 변의 길이가 6cm 인 정사각형 모양의 종이가 있다. 네 모퉁이에서 크기가 같은 정사각형을 잘라 내고 남은 부분을 접어서 뚜껑이 없는 직육면체 모양의 상자를 만들려고 한다. 이 때, 이 상자의 부피의 최댓값을 구하여라.



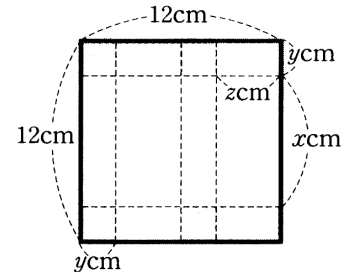
- 10 한 변의 길이가 12인 정삼각형 모양의 종이를 오른쪽 그림과 같이 세 꼭지점 주위에서 합동인 사각형을 자른 후 뚜껑이 없는 삼각기둥 모양의 상자를 만들려고 한다. 이 때, 상자의 부피의 최댓값을 구하여라.



- 11 밑면의 반지름의 길이와 높이의 합이 30cm 인 원뿔 중에서 그 부피가 최대일 때의 밑면의 반지름의 길이는?

- ① 10cm ② 12cm ③ 15cm
④ 20cm ⑤ 24cm

- 12 한 변의 길이가 12cm 인 정사각형 모양의 종이를 오른쪽 그림과 같이 색칠한 부분을 잘라 내고 점선을 따라 접어서 직육면체를 만들려고 한다. 직육면체의 부피의 최솟값을 구하여라.

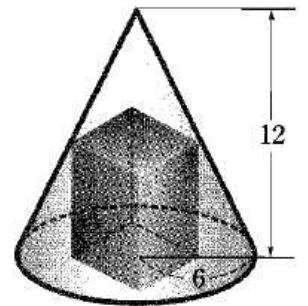


필수예제 3 최대 · 최소의 활용 (3)

- 밑면의 반지름의 길이가 3cm , 높이가 15cm 인 직원뿔에 내접하는 직원기둥의 부피의 최대값을 구하여라.

유제

- 13 오른쪽 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 6이고, 높이가 12인 직원뿔에 내접하는 정사각기둥을 만들려고 한다. 이 때, 정사각기둥의 부피를 구하여라.



- 14 밑면의 반지름의 길이 r 과 높이 h 의 합이 일정한 직원기둥 중에서 부피가 최대인 것의 r 과 h 의 비 $r:h$ 를 구하여라.

- 15 밑면의 반지름의 길이가 3, 높이가 18인 원뿔에 내접하는 원기둥 중에서 부피가 최대가 되는 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

- 16 겉넓이가 96π 인 원기둥 중에서 부피가 최대인 것의 밑면의 반지름의 길이를 r , 높이를 h 라 할 때, $r : h$ 를 구하여라.

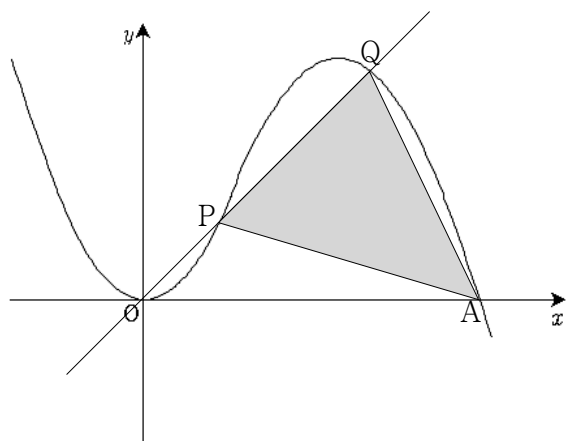
17 어느 수입업체에서는 명품 가방을 50만 원에 수입하여 65만 원에 팔고 있다. 이 가방의 하루 판매량이 600개인데 가격을 기존 가격보다 x 만 원 인상할 경우 하루 판매량은 x^2 개씩 감소한다고 한다. 하루의 이익금이 최대가 되게 하려면 가방 한 개의 가격을 얼마로 정해야 하는가?

- ① 68만 원 ② 70만 원 ③ 72만 원
④ 75만 원 ⑤ 80만 원

18 미분가능한 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프는 $x=a$ 와 $x=b$ 에서 만나고, $a < c < b$ 인 $x=c$ 에서 두 함수값의 차가 최대가 된다. 다음 중 항상 옳은 것은?

- ① $f'(c) = -g'(c)$ ② $f'(c) = g'(c)$
③ $f'(a) = g'(b)$ ④ $f'(b) = g'(b)$
⑤ $f'(a) = g'(a)$

19 아래 그림과 같이 삼차함수 $y = x^2(3-x)$ 의 그래프와 직선 $y = mx$ 가 제 1사분면 위의 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 이 때, 세 점 A(3, 0), P, Q를 꼭지점으로 하는 $\triangle APQ$ 의 넓이가 최대가 되게 하는 양수 m 에 대하여 $10m$ 의 값을 구하시오.



20 어떤 은행에서 개발한 신탁 상품은 가입자에게 제시한 이율이 $a\%$ 일 때 가입자들의 예금 총액은 ka^2 원(k 는 양의 상수)이 되고, 이 예금은 전부 12%의 이율로 중소기업에 대출된다. 은행의 예대마진(대출 이자에서 고객에게 지불할 예금 이자를 뺀 금액)이 최대가 되게 하려면 가입자에게 얼마의 이율을 제시하는 것이 좋은가?

- ① 7% ② 8% ③ 9%
④ 10% ⑤ 11%

연습문제

1 다음 중 모든 실수 x 에 대하여 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 를 만족하는 함수는?

- ① $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ ② $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 6x + 9$
 ③ $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ ④ $f(x) = -3x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 2$
 ⑤ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 5$

2 삼차함수 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + kx + 3$ 이 임의의 실수 a, b 에 대하여 $f(a) = f(b)$ 이면 $a = b$ 를 만족한다. 이 때, 상수 k 의 값의 범위는?

- ① $2 \leq k \leq 3$ ② $k \leq 2$ 또는 $k \geq 3$ ③ $k \geq \frac{3}{2}$
 ④ $k \leq \frac{3}{2}$ ⑤ 모든 실수

3 함수 $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 1$ 의 세 극점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 무게중심을 구하여라.

4 함수 $f(x) = x^3 - 12x + 2$ 의 극대점과 극소점을 각각 A, B라 할 때, 직선 AB의 y 절편은?

- ① 2 ② 8 ③ 12
 ④ 24 ⑤ 34

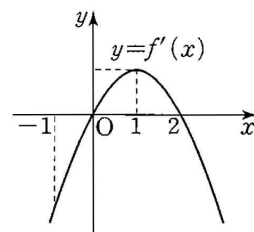
5 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 가 $x = 1, x = 3$ 에서 극값을 갖고 그 중 극솟값이 -6 일 때, 상수 c 의 값은?

- ① -10 ② -8 ③ -6
 ④ -4 ⑤ -2

6 함수 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 9x + 27$ 의 극댓값과 극솟값의 합이 0일 때, 실수 a 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

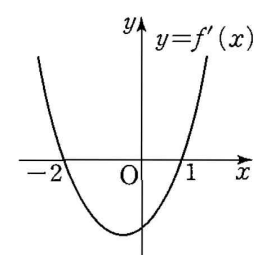
7 함수 $y = f(x)$ 의 도함수 $y = f'(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 옳은 것은?



- ① $f(x)$ 는 구간 $(-1, 0)$ 에서 증가한다.
 ② $f(x)$ 는 구간 $(1, 2)$ 에서 감소한다.
 ③ $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극소이다.
 ④ $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극대이다.
 ⑤ $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극소이다.

8 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + \frac{1}{2}$ 의

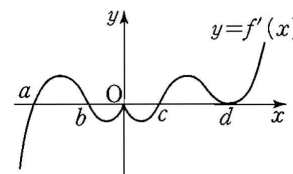
도함수 $y = f'(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $y = f(x)$ 의 극소값은?



- ① -5 ② -4
 ③ -3 ④ -2
 ⑤ -1

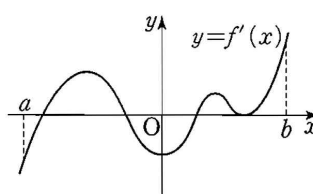
9 모든 실수에서 연속인 함수

$y = f'(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 함수 $f(x)$ 가 극소를 갖는 점의 개수를 구하여라.



10 구간 (a, b) 에서 연속인 함수

$f(x)$ 에 대하여 $y = f'(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 이 구간에서 $f(x)$ 의 극소점의 개수는?



- ① 1개 ② 2개
 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

11 함수 $f(x) = x^3 - (a-1)x^2 - \frac{4}{3}ax + \frac{2}{3}a$ 가 극값을 갖지 않을 때, a 의 값은?

- ① -1 ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0
 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ 1

12 삼차함수 $f(x) = -x^3 + ax^2 - ax + 3$ 이 폐구간 $[-1, 1]$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가질 때, 상수 a 의 값의 범위는?

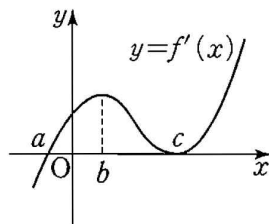
- ① $-1 \leq a < 0$ ② $0 \leq a \leq 1$ ③ $1 \leq a \leq 2$
 ④ $2 \leq a < 3$ ⑤ $3 < a \leq 4$

13 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + ax + a$ 이 극값을 갖도록 하는 상수 a 의 값의 범위는?

- ① $0 \leq a \leq 12$ ② $0 \leq a \leq 3$ ③ $a < 0$ 또는 $a > 3$
 ④ $a \leq -3$ 또는 $a \geq 3$ ⑤ $a < 0$ 또는 $a > 12$

14 함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax + 10$ 이 $-2 < x < 3$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가질 때, 상수 a 의 값의 범위를 구하여라.

15 사차함수 $f(x)$ 의 도함수 $y = f'(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 <보기>중 옳은 것을 모두 고른 것은?



〈 보 기 〉
 ㄱ. $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극소이다.
 ㄴ. $f(x)$ 는 $x=b$ 에서 극대이다.
 ㄷ. $f(x)$ 는 $x=c$ 에서 극대이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ 없다.

16 사차함수 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 6$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값을 구하시오.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$ 이다.
 (나) 함수 $f(x)$ 는 극솟값 -10 을 갖는다.

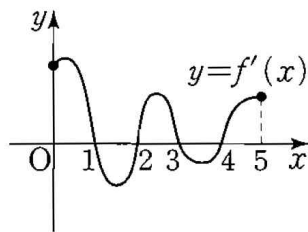
17 그래프가 원점을 지나는 삼차함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극소이고 $x=b$ 에서 극대일 때, 다음 <보기>중 옳은 것을 모두 고른 것은?

〈 보 기 〉
 ㄱ. $f(a) < 0$ ㄴ. $f(b) < 0$
 ㄷ. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0$ ㄹ. $f'(a) = 0$

- ① ㄱ ② ㄷ, ㄹ ③ ㄱ, ㄴ, ㄹ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ

18 오른쪽 그림은 주어진

폐구간에서 연속인 함수 $y = f(x) (0 \leq x \leq 5)$ 의 도함수 $y = f'(x)$ 의 그래프이다. 다음 중 옳지 않은 것은?



- ① $f(x)$ 는 극댓값이 두 개이다.
 ② $f(x)$ 는 반드시 최댓값을 갖는다.
 ③ 최솟값은 $f(0), f(2), f(4)$ 중에 있다.
 ④ $f(3) > 0$ 이면 $f(4) < 0$ 이다.
 ⑤ $f(0) > 0$ 이면 $f(1) > 0$

19 실수에서 정의된 미분 가능한 함수 $f(x)$ 는 다음 두 조건을 만족한다.

(가) 임의의 실수 x, y 에 대하여
 $f(x-y) = f(x) - f(y) + xy(x-y)$
 (나) $f'(0) = 8$

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극댓값을 갖고 $x=b$ 에서 극소값을 가질 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.

20 모든 계수가 정수인 삼차함수 $y = f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 이다.
 (나) $f(1) = 5$
 (다) $1 < f'(1) < 7$

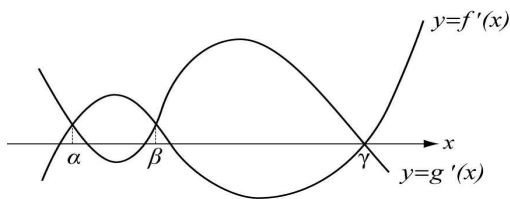
함수 $y = f(x)$ 의 극댓값은 m 이다. m^2 의 값을 구하시오.

21 원점을 지나는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $y = f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $f(2+x) = f(2-x)$
 (나) $x=1$ 에서 극솟값을 갖는다.

이 때, $f(x)$ 의 극댓값을 a 라 할 때, a^2 의 값을 구하시오.

22 그림과 같이 두 곡선 $y=f'(x)$, $y=g'(x)$ 는 x 좌표가 α, β, γ 인 점에서 만나고 $h(x)=f(x)-g(x)$ 의 최솟값이 음수일 때, $y=h(x)$ 에 대하여 항상 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $h(\alpha)=h(\gamma) < h(\beta)$
 ㄴ. $(\beta-\alpha)\{h(\gamma)-h(\beta)\} < (\gamma-\beta)\{h(\beta)-h(\alpha)\}$
 ㄷ. $h(x)=0$ 은 적어도 서로 다른 두 실근을 갖는다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

23 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$ 는 $x=a$ 에서 극솟값 b 를 가진다.
 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(2, f(2))$ 에서 접하는 직선을 l 이라 할 때, 점 (a, b) 에서 직선 l 까지의 거리가 d 이다.
 $90d^2$ 의 값을 구하시오.

24 다항함수 $f(x)$ 가 임의의 실수 x 에 대하여 $f(-ax)=-af(x)$ 가 성립할 때, $f'(x)$ 와 같은 것은? (단, $a \neq 0$, $f'(x)$ 는 $f(x)$ 의 도함수)

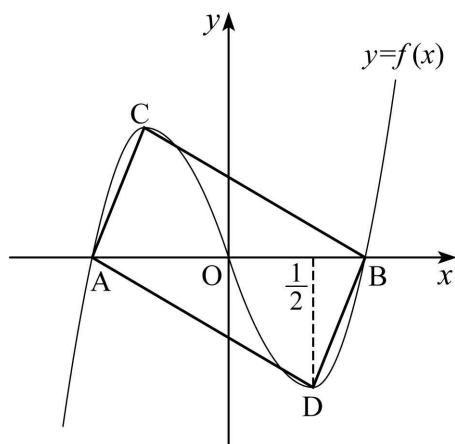
- ① $af'(ax)$ ② $\frac{1}{a}f'(x)$ ③ $af'(x)$
 ④ $f'(-ax)$ ⑤ $\frac{1}{a}f'(-ax)$

25 삼차함수 $y=f(x)$ 가 극댓값 $\frac{1}{2}$, 극솟값 -2 를 가질 때, 함수 $g(x)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$g(x)=\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\{f(x)\}^{2n}}$ 이 때, 실수 전체의 집합에서 함수 $y=g(x)$ 는 $x=\alpha$ 에서 불연속이다. α 의 개수는?

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

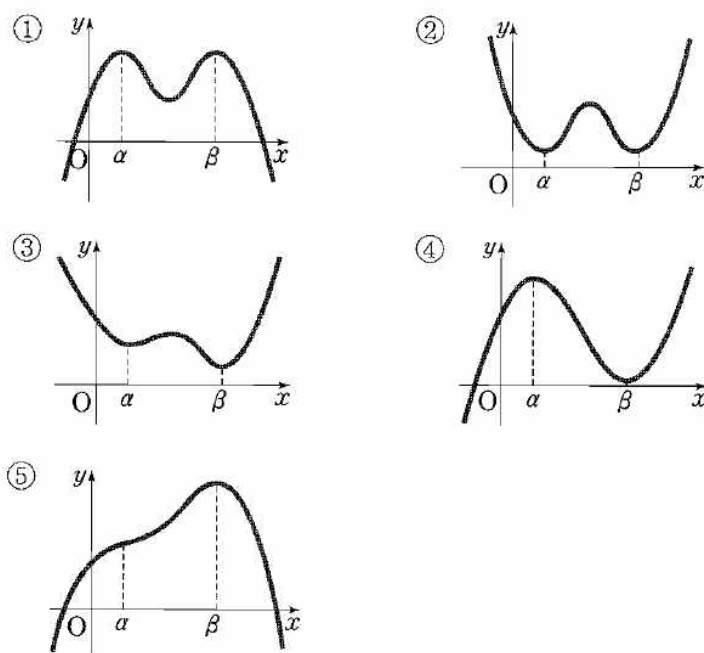
26 그림은 원점 O 에 대하여 대칭인 삼차함수 $f(x)$ 의 그래프이다. 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축이 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 각각 A, B 라 하고, 함수 $f(x)$ 의 극대, 극소인 점을 각각 C, D 라 하자.



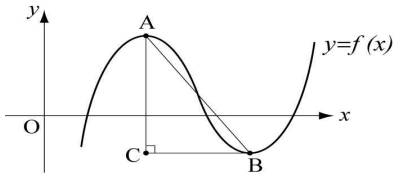
점 D 의 x 좌표가 $\frac{1}{2}$ 이고 사각형 $ADBC$ 의 넓이가 $\sqrt{3}$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 극댓값은?

- ① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$
 ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

27 함수 $y=f(x)$ 의 도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은?



28 삼차함수 $y=f(x)$ 는 점 A에서 극대이고 점 B에서 극소이며 극댓값과 극솟값의 차는 8이다. $y=f(x)$ 의 그래프 밖의 한 점 C에 대하여 $\triangle ABC$ 의 외심의 좌표가 (6, 1), $\angle C=90^\circ$, $\overline{AB}=10$ 일 때, $f'(x)=0$ 의 두 근의 곱은? (단, $\overline{AC}$ 는 y 축과 평행이다.)



- ① 27 ② 30 ③ 33
④ 36 ⑤ 39

29 구간 $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$ 에서 함수 $f(x)=x^3+x^2-x+1$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

- ① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

30 구간 $[-1, 1]$ 에서 함수 $f(x)=x^3+3x^2+10$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

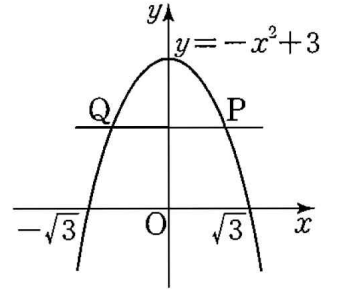
31 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ 이 $x=3$ 에서 극솟값 1을 가질 때, 구간 $[0, 3]$ 에서 이 함수의 최댓값은?

- ① 1 ② 4 ③ 5
④ 9 ⑤ 10

32 함수 $f(x)=ax^3-6ax^2+b$ 가 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 최댓값이 3, 최솟값이 -13일 때, $a+b$ 의 값은? (단, $a > 0$)

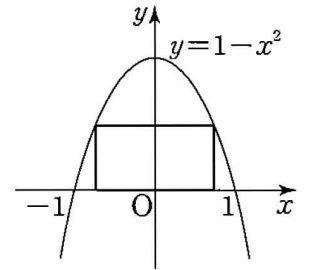
- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 6

33 오른쪽 그림과 같이 x 축에 평행인 직선이 포물선 $y=-x^2+3$ (단, $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$)와 서로 다른 두 점 P, Q에서 만날 때, $\triangle OPQ$ 의 넓이의 최댓값은? (단, 점 P는 제 1사분면에 있다.)



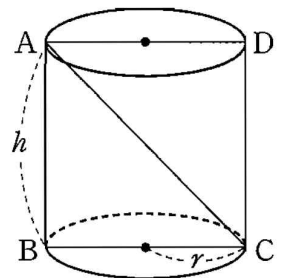
- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

34 오른쪽 그림과 같이 구간 $[-1, 1]$ 에서 한 변이 x 축 위에 놓이고, 두 꼭지점이 포물선 $y=1-x^2$ 위에 놓인 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하여라.



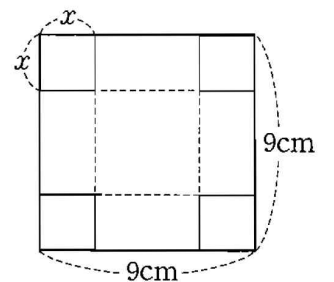
- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

35 오른쪽 그림과 같이 원기둥의 두 밑면의 중심을 지나도록 자른 단면으로 이루어진 도형 ABCD의 대각선 AC의 길이가 일정한 원기둥 중에서 부피가 최대인 것의 밑면의 반지름의 길이 r 와 높이 h 의 비는?



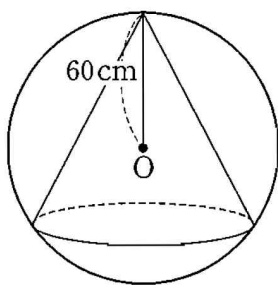
- ① $1:\sqrt{2}$ ② $\sqrt{2}:\sqrt{3}$
③ $2:3$ ④ $\sqrt{2}:2$ ⑤ $1:\sqrt{3}$

36 한 변의 길이가 9cm인 정사각형 모양의 종이가 있다. 이 종이의 네 모서리에서 크기가 같은 정사각형을 잘라내고 남은 부분을 접어서 상자를 만들려고 한다. 만들 수 있는 상자 부피의 최댓값은?



- ① 45cm^3 ② 50cm^3
③ 54cm^3 ④ 60cm^3 ⑤ 63cm^3

37 반지름의 길이가 60cm인 구에
내접하는 직원뿔을 조각하려고 한다. 이
직원뿔의 부피가 최대일 때, 직원뿔의
높이는?



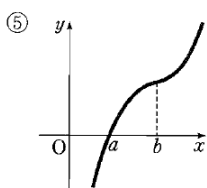
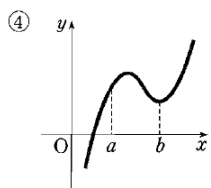
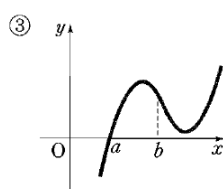
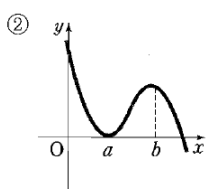
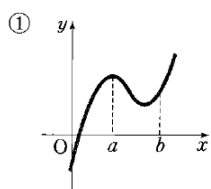
- ① $50\sqrt{2}$ cm ② 75 cm
③ 80 cm ④ $80\sqrt{3}$ cm
⑤ 90 cm

38 겉넓이가 36cm^3 이고 밑면이 정사각형인 직육면체의
부피가 최대일 때, 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.

39 삼차함수 $f(x)$ 는 극값을 갖고 두 실수 a 와 b 에 대하여
다음은 만족시킨다.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x-a} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)-1}{x-b} = 2$$

이 때, 다음 중 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은?
(단, $0 < a < b$)





04. 삼차·사차함수가 극값을 가질 조건

필수예제 & 유제

필수예제 1. 정답 $0 < a < 3$

(1) $f(x) = x^3 + ax^2 + 3ax + 2$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 3a$$

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 가질 조건은

방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$\Leftrightarrow f'(x) = 0$ 의 판별식 $D > 0$ 이다.

이차방정식 $3x^2 + 2ax + 3a = 0$ 의 판별식 $D > 0$ 을 만족하는 a 의 값의 범위

$$\frac{D}{4} = a^2 - 9a > 0, \quad a < a - 9 > 0$$

$$\therefore a < 0 \text{ 또는 } a > 9$$

(2) $f(x) = 3x^3 + (a+2)x^2 + ax + 1$

$$f'(x) = 9x^2 + 2(a+2)x + a$$

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않을 조건

방정식 $f'(x) = 0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

$\Leftrightarrow f'(x) = 0$ 의 판별식 $D < 0$ 이다.

이차방정식

$9x^2 + 2(a+2)x + a = 0$ 의 판별식 $D \leq 0$ 을 만족하는 a 의 값의 범위

$$\frac{D}{4} = (a+2)^2 - 9a \leq 0$$

$$a^2 - 5a + 4 \leq 0,$$

$$(a-1)(a-4) \leq 0$$

$$\therefore 1 \leq a \leq 4$$

유제 1. 정답 풀이 참조

$f(x) = x^3 - ax^2 + (a^2 - 2a)x$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax + a^2 - 2a$$

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

따라서 이차방정식

$$3x^2 - 2ax + a^2 - 2a = 0$$

의 판별식 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3(a^2 - 2a) > 0$$

$$a(a-3) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 3$$

유제 2. 정답 $a < -3$ 또는 $a > 3$

$f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 4$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 3$$

$f(x)$ 가 극값을 가지려면 방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식

$3x^2 + 2ax + 3 = 0$ 의 판별식 $D > 0$ 이어야 한다.

$$\therefore \frac{D}{4} = a^2 - 9 > 0, \quad (a+3)(a-3) > 0$$

$$\therefore a < -3 \text{ 또는 } a > 3$$

유제 3. 정답 4

$f(x) = x^3 - ax^2 + (a^2 - 2a)x$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax + a^2 - 2a$$

$f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $3x^2 - 2ax + a^2 - 2a = 0$ 의 판별식 $D > 0$ 이어야 한다.

$$\therefore \frac{D}{4} = a^2 - 3(a^2 - 2a) > 0$$

$$-2a^2 + 6a > 0, \quad a(a-3) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

또, $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + (5a-4)x + 2$ 에서

$$g'(x) = x^2 + 2ax + 5a - 4$$

$g(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 방정식 $g'(x) = 0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식

$x^2 + 2ax + 5a - 4 = 0$ 의 판별식 $D' \leq 0$ 이어야 한다.

$$\therefore \frac{D'}{4} = a^2 - (5a - 4) \leq 0$$

$$a^2 - 5a + 4 \leq 0, \quad (a-1)(a-4) \leq 0$$

$$\therefore 1 \leq a \leq 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 에 의하여 a 의 값의 범위는 $1 \leq a \leq 3$

따라서 정수 a 는 1, 2 이고 그 합은 3이다.

유제 4. 정답 π

$f(x) = (p-2)x^3 + 3(q-1)x^2 - 3px + 5$ 에서

$$f'(x) = 3(p-2)x^2 + 6(q-1)x - 3p$$

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 방정식 $f'(x) = 0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 한다,

따라서 이차방정식

$$(p-2)x^2 + 2(q-1)x - p = 0$$

의 판별식 $D \leq 0$ 이어야 하므로

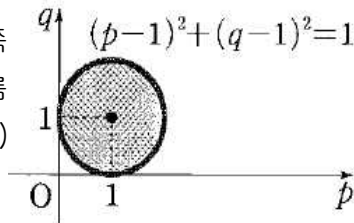
$$\frac{D}{4} = (q-1)^2 + p(p-2) \leq 0$$

$$p^2 - 2p + (q-1)^2 \leq 0$$

$$\therefore (p-1)^2 + (q-2)^2 \leq 1 \dots\dots \textcircled{1}$$

부등식 ①이 나타내는 영역은 오른쪽 그림과 같이 중심이 (1, 1)이고 반지름의 길이가 1인 원의 내부 (경계선 포함) 이므로 그 넓이는

$$\pi \cdot 1^2 = \pi$$



필수예제 2. 정답 (1) $a < -2$ (2) $\therefore a < -3$

(1) $f(x) = x^3 + 3(a-1)x^2 - 3(a-3)x + 5$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 6(a-1)x - 3(a-3)$$

함수 $f(x)$ 가 $-1 < x < 1$ 에서 극댓값을 $x > 1$ 에서 극솟값을 가질 조건 방정식 $f'(x) = 0$ 의 두 실근 중 한 근은 $-1 < x < 1$ 에 있고, 다른 한 근은 $x > 1$ 에 있어야 하므로

(i) $f(-1) > 0$ (ii) $f'(1) < 0$

(i) $f'(-1) > 0$ 에서

$$f'(-1) = 3 - 6(a-1) - 3(a-3) > 0$$

$$-9a + 18 > 0$$

$$\therefore a < -2 \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $f'(1) < 0$ 에서

$$f'(1) = 3 + 6(a-1) - 3(a-3) < 0$$

$$3a + 6 < 0$$

$$\therefore a < -2 \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통범위를 구하면

$$a < -2$$

(2) $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 4$ 에서

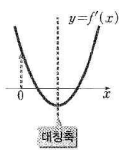
$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 3$$

함수 $f(x)$ 가 $x > 0$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가질 조건은 방정식 $f'(x) = 0$ 의 서로 다른 두 실근이 모두 $x > 0$ 에 있어야 하므로

(i) $f'(x) = 0$ 의 판별식 $D > 0$

(ii) $f'(0) > 0$

(iii) $(y = f'(x))$ 의 대칭축 > 0



(i) 이차방정식

$$3x^2 + 2ax + 3 = 0 \text{의 판별식 } D > 0 \text{에서}$$

$$\frac{D}{4} = a^2 - 9 > 0 \quad (a+3)(a-3) > 0$$

$$\therefore a < -3 \text{ 또는 } a > 3 \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $f'(0) > 0$ 에서 $f'(0) = 3 > 0$

(iii) $(y = f'(x))$ 의 대칭축 > 0 에서

$$x = -\frac{a}{3} > 0 \quad \therefore a < 0 \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통범위를 구하면 $\therefore a < -3$

유제 5. 정답 풀이 참조

(1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + (3a-2)x - \frac{1}{2}$ 에서

$$f'(x) = x^2 - 2ax + 3a - 2$$

함수 $f(x)$ 가 $0 < x < 1$ 에서 극댓값을, $x > 1$ 에서 극솟값을 가지려면

$f'(x) = 0$ 의 서로 다른 두 실근 중

한 근이 $0 < x < 1$ 에 있고, 다른 한

근은 $x > 1$ 에 있어야 하므로

(i) $f'(0) > 0$, (ii) $f'(1) < 0$

(i) $f'(0) > 0$ 에서

$$f'(0) = 3a - 2 > 0$$

$$\therefore a > \frac{2}{3} \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $f'(1) < 0$ 에서

$$f'(1) = 1 - 2a + 3a - 2 < 0$$

$$\therefore a < 1 \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통범위를 구하면

$$\frac{2}{3} < a < 1$$

(2) $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 9x - 1$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 6ax + 9$$

함수 $f(x)$ 가 $-2 < x < 2$ 에서 극댓

값과 극솟값을 모두 가지려면 방정

식 $f'(x) = 0$ 의 서로 다른 두 실근

이 $-2 < x < 2$ 에 있어야 하므로

(i) $f'(x) = 0$ 의 판별식 $D > 0$

(ii) $f'(-2) > 0$

(iii) $f'(2) > 0$

(iv) $-2 < (y = f'(x)) \text{의 대칭축} < 2$

(i) 이차방정식 $3x^2 - 6ax + 9 = 0$ 의 판별식 $D > 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = 9a^2 - 27 > 0, \quad a^2 - 3 > 0$$

$$(a + \sqrt{3})(a - \sqrt{3}) > 0$$

$$\therefore a < -\sqrt{3} \text{ 또는 } a > \sqrt{3} \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $f'(-2) > 0$ 에서

$$f'(-2) = 12 + 12a + 9 > 0$$

$$12a + 21 > 0 \quad \therefore a > -\frac{7}{4} \dots\dots \textcircled{2}$$

(iii) $f'(2) > 0$ 에서

$$f'(2) = 12 - 12a + 9 > 0$$

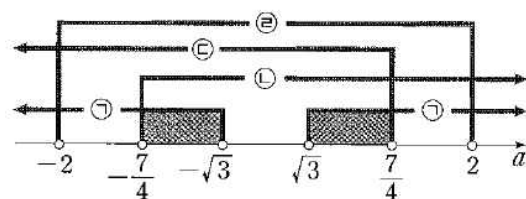
$$12a - 21 < 0 \quad \therefore a < \frac{7}{4} \dots\dots \textcircled{3}$$

(iv) 이차함수 $y = f'(x)$ 의 그래프의 축의 방정식

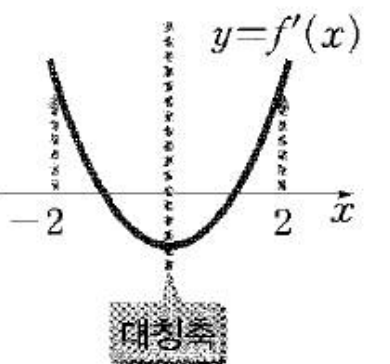
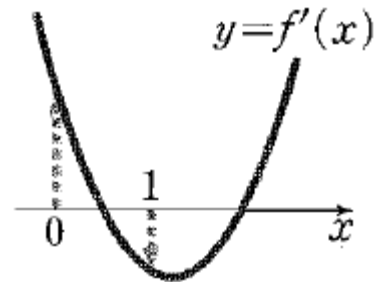
$x = a$ 가 -2 와 2 사이에 와야 하므로

$$-2 < a < 2 \dots\dots \textcircled{4}$$

①, ②, ③, ④의 공통범위를 구하면



$$\therefore -\frac{7}{4} < a < -\sqrt{3} \text{ 또는 } \sqrt{3} < a < \frac{7}{4}$$



유제 6. 8. 정답 $-1 < k < 0$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - kx^2 + (k^2 - 1)x + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = x^2 - 2kx + k^2 - 1$$

함수 $f(x)$ 가 $-2 < x < -1$ 에서 극대값을,
 $x > -1$ 에서 극소값을 가지려면 방정식

$f'(x) = 0$ 의 두 근 중 한 근이 $-2 < x < -1$ 에, 다른 한 근은 $x > -1$ 에 있어야 하므로

$$f'(-2) > 0, f'(-1) < 0$$

(i) $f'(-2) > 0$ 에서

$$f'(-2) = 4 + 4k + k^2 - 1 > 0$$

$$k^2 + 4k + 3 > 0, (k+3)(k+1) > 0$$

$$\therefore k < -3 \text{ 또는 } k > -1 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

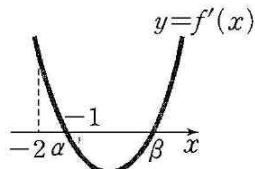
(ii) $f'(-1) < 0$ 에서

$$f'(-1) = 1 + 2k + k^2 - 1 < 0$$

$$k^2 + 2k < 0, k(k+2) < 0$$

$$\therefore -2 < k < 0 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 실수 k 의 값의 범위는 $-1 < k < 0$



유제 7. 정답 $0 < k < 1$ 또는 $k > 4$

$$f(x) = 3x^3 - (k+2)x^2 + kx + 1$$

$$f'(x) = 9x^2 - 2(k+2)x + k$$

함수 $f(x)$ 가 $x > 0$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식
 $f'(x) = 0$ 의 서로 다른 두 근이 $x > 0$ 에 있어야 하므로

(i) $f'(x) = 0$ 의 판별식 $D > 0$

$$f'(0) > 0$$

($y = f'(x)$ 의 대칭축) > 0

$$f'(x) = 9x^2 - 2(k+2)x + k = 0 \text{에서}$$

$$\frac{D}{4} = (k+2)^2 - 9k > 0$$

$$k^2 - 5k + 4 > 0, (k-1)(k-4) > 0$$

$$\therefore k < 1 \text{ 또는 } k > 4 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

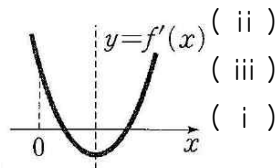
(ii) $f'(0) > 0$ 에서

$$f'(0) = k > 0 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

(iii) 이차함수 $y = f'(x)$ 의 축의 방정식 $x = \frac{k+2}{9}$ 가 0보다 커야 하므로

$$x = \frac{k+2}{9} > 0 \therefore k > -2 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}$ 에서 실수 k 의 값의 범위는 $0 < k < 1$ 또는 $k > 4$



유제 8. 정답 $-\frac{5}{4} < a < -1$

$$f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3x \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6ax + 3$$

함수 $f(x)$ 가 $-1 < x < 2$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식
 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근이 $-1 < x < 2$ 에 있어야 하므로

(i) $f'(x) = 0$ 의 판별식 $D > 0$

(ii) $f'(-1) > 0$

(iii) $f'(2) > 0$

(iv) $-1 < (y = f'(x) \text{의 대칭축}) < 2$

(i) $f'(x) = 3x^2 + 6ax + 3 = 0$ 의 판별식

$D > 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = 9a^2 - 9 > 0$$

$$\therefore a < -1 \text{ 또는 } a > 1 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

(ii) $f'(-1) > 0$ 에서

$$f'(-1) = 3 - 6a + 3 > 0$$

$$\therefore a < 1 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

(iii) $f'(2) > 0$ 에서

$$f'(2) = 12 + 12a + 3 > 0$$

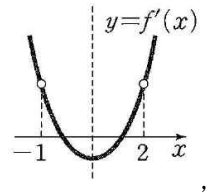
$$\therefore a > -\frac{5}{4} \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

(iv) $-1 < (u = f'(x) \text{의 대칭축 } x = -a) < 2$ 에서

$$-1 < -a < 2$$

$$\therefore -2 < a < 1 \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}, \textcircled{㉣}$ 의 공통범위를 구하면 $-\frac{5}{4} < a < -1$



필수예제 3. 정답 (1) $a < 0$ 또는 $0 < a < \frac{9}{4}$

$$(2) a = -2 \text{ 또는 } a \geq \frac{1}{4}$$

$$(1) f(x) = x^4 + 4x^3 + 2ax^2 + 5$$

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 4ax$$

$$= 4x(x^2 + 3x + a)$$

사차함수 $f(x)$ 가 극댓값을 가지려면

방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 하고, 방정식

$4x(x^2 + 3x + a) = 0$ 의 한 근이 $x = 0$ 이므로 $x^2 + 3x + a = 0$ 은 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) $g(x) = x^2 + 3x + a$ 라 하면 $g(x) = 0$ 은 0을 제외한 근을 가져야 하므로

$$g(0) \neq 0 \therefore a \neq 0 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

방정식 $x^2 + 3x + a = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면 판별식 $D > 0$ 이어야 하므로

$$D = 9 - 4a > 0$$

$$\therefore a < \frac{9}{4} \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 의 공통범위를 구하면

$$a < 0 \text{ 또는 } 0 < a < \frac{9}{4}$$

$$(2) f(x) = x^4 - 4x^3 + 2ax^2 + 1$$

$$f'(x) = 4x^3 + 4(a-1)x + 4a$$

$$= 4\{x^3 + (a-1)x + a\}$$

$$= 4(x+1)(x^2 - x + a)$$

사차함수 $f(x)$ 가 극댓값을 갖지 않을 조건은

방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 실근을 가질 조건을 구하여 부정한다.

(i) $g(x) = x^2 - x + a$ 라 하면 $g(x) = 0$ 은 0을 제외한 근을 가져야 하므로

$$g(0) \neq 0$$

$$\therefore a \neq 0 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

(ii) 방정식 $x^2 - x + a = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면 판별식 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 1 - 4a > 0 \quad \therefore a < \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

㉓, ㉔의 공통범위를 구하면

$$a < -2 \text{ 또는 } -2 < a < \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

$$\textcircled{㉕} \text{을 부정하면 } a = -2 \text{ 또는 } a \geq \frac{1}{4}$$

유제 9. 정답 풀이 참조

(1) $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 6ax^2$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^3 + 24x^2 - 12ax \\ &= 12x(x^2 + 2x - a) \end{aligned}$$

사차함수 $f(x)$ 가 극댓값을 가지려면 방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

이 때, 방정식 $12x(x^2 + 2x - a) = 0$ 의 한 근이 $x = 0$ 이므로 $x^2 + 2x - a = 0$ 은 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) $g(x) = x^2 + 2x - a$ 라 하면 $g(x) = 0$ 은 0을 제외한 근을 가져야 하므로

$$g(0) \neq 0 \quad \therefore a \neq 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉖}$$

(ii) 방정식 $x^2 + 2x - a = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면 판별식 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 1 + a > 0 \quad \therefore a > -1 \quad \dots\dots \textcircled{㉗}$$

㉖, ㉗의 공통범위를 구하면

$$-1 < a < 0 \text{ 또는 } a > 0$$

(2) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2ax^2 + 1$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 + 4ax \\ &= 4x(x^2 - 3x + a) \end{aligned}$$

사차함수 $f(x)$ 가 극댓값을 갖지 않을 조건은 방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 실근을 가질 조건을 구하여 부정한다.

따라서 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

방정식 $4x(x^2 - 3x + a) = 0$ 의 한 근이 $x = 0$ 이므로 $-3x + a = 0$ 은 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) $g(x) = x^2 - 3x + a$ 라 하면 $g(x) = 0$ 은 0을 제외한 근을 가져야 하므로

$$g(0) \neq 0 \quad \therefore a \neq 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉘}$$

(ii) 방정식 $x^2 - 3x + a = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면 판별식 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 9 - 4a > 0 \quad \therefore a < \frac{9}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉙}$$

㉘, ㉙의 공통범위를 구하면

$$a < 0 \text{ 또는 } 0 < a < \frac{9}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉚}$$

㉚을 부정하면

$$a = 0 \text{ 또는 } a \geq \frac{9}{4}$$

$$\text{유제 10. 정답 } -\frac{9}{8} < a < 0 \text{ 또는 } a > 0$$

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - ax^2 + 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2ax = 2x(2x^2 + 3x - a)$$

사차함수 $f(x)$ 가 극대값을 가지려면 방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 하고 $2x(2x^2 + 3x - a) = 0$ 의 한 근이 $x = 0$ 이므로 $2x^2 + 3x - a = 0$ 이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$g(x) = 2x^2 + 3x - a$ 라 하면 $g(x) = 0$ 은 0을 제외한 근을 가져야 하므로

$$g(0) \neq 0 \quad \therefore a \neq 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉛}$$

방정식 $2x^2 + 3x - a = 0$ 의 판별식 $D > 0$ 이므로

$$D = 9 + 8a > 0 \quad \therefore a > -\frac{9}{8} \quad \dots\dots \textcircled{㉜}$$

㉛, ㉜에 의하여 a 의 값의 범위는

$$-\frac{9}{8} < a < 0 \text{ 또는 } a > 0$$

$$\text{유제 11. 정답 } a < -2 \text{ 또는 } -2 < a < \frac{1}{4}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 - (a-1)x^2 + 2ax \text{에서}$$

$$f'(x) = -2x^3 - 2(a-1)x + 2a$$

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & -2 & 0 & -2a+2 & 2a \\ & & -2 & -2 & -2a \\ \hline & -2 & -2 & -2a & 0 \end{array}$$

$$\therefore f'(x) = (x-1)(-2x^2 - 2x - 2a) = -2(x-1)(x^2 + x + a)$$

함수 $f(x)$ 가 극소값을 가지려면 방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 하고 $-2(x-1)(x^2 + x + a) = 0$ 의 한 근이 $x = 1$ 이므로 $x^2 + x + a = 0$ 은 1이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$g(x) = x^2 + x + a$ 라 하면 $g(x) = 0$ 이 1을 제외한 근을 가져야 하므로 $g(1) \neq 0 \quad \therefore a \neq -2 \quad \dots\dots \textcircled{㉞}$

방정식 $x^2 + x + a = 0$ 의 판별식 $D > 0$ 이므로

$$D = 1 - 4a > 0 \quad \therefore a < \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉟}$$

㉞, ㉟에 의하여 a 의 값의 범위는

$$a < -2 \text{ 또는 } -2 < a < \frac{1}{4}$$

$$\text{유제 12. 정답 } a = 0 \text{ 또는 } a \geq \frac{9}{8}$$

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 \text{에서}$$

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2ax = 2x(2x^2 + 3x + a)$$

사차함수 $f(x)$ 가 극대값을 갖지 않을 조건은 방정식 $f'(x) = 0$ 이 세 실근을 가질 조건을 구하여 그 결과를 부정한다.

방정식 $2x(2x^2 + 3x + a) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $2x(2x^2 + 3x + a) = 0$ 의 한 근이 $x = 0$ 이므로 방정식

$2x^2 + 3x + a = 0$ 은 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가지면 된다.

$g(x) = 2x^2 + 3x + a$ 라 하면 $g(x) = 0$ 은 0을 제외한 근을 가져야 하므로

$$g(0) \neq 0 \quad \therefore a \neq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

방정식 $2x^2 + 3x + a = 0$ 의 판별식 $D > 0$ 이므로

$$D = 9 - 8a > 0 \quad \therefore a < \frac{9}{8} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에 의하여 a 의 값의 범위는

$$a < 0 \quad \text{또는} \quad 0 < a < \frac{9}{8} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

㉢을 부정하여 함수 $f(x)$ 가 극대값을 갖지 않도록 하는 실수 a 의

$$\text{값의 범위를 구하면 } a = 0 \quad \text{또는} \quad a \geq \frac{9}{8}$$

유제 13. 정답 $a = -6$ 또는 $a \geq \frac{1}{4}$

$$f(x) = -x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 2(a-2)x^2 + 8ax \text{에서}$$

$$f'(x) = -4x^3 + 4x^2 - 4(a-2)x + 8a \\ = \{-4x^3 - x^2 + (a-2)x - 2a\}$$

$$2 \left| \begin{array}{cccc} 1 & -1 & a-2 & -2a \\ & 2 & 2 & 2a \\ 1 & 1 & a & 0 \end{array} \right|$$

$$\therefore f(x) = -4(x-2)(x^2+x+a)$$

사차함수 $f(x)$ 가 극솟값을 갖지 않을 조건은 방정식 $f'(x) = 0$ 이 세 실근을 가질 조건을 구하여 그 결과를 부정한다.

방정식 $-4(x-2)(x^2+x+a) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $-4(x-2)(x^2+x+a) = 0$ 의 한 근이 $x = 2$ 이므로 방정식 $x^2+x+a = 0$ 은 2가 아닌 서로 다른 두 실근을 가지면 된다.

$$g(x) = x^2 + x + a \text{라 하면}$$

$$g(2) \neq 0 \quad \therefore a \neq -6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

방정식 $x^2 + x + a = 0$ 의 판별식 $D > 0$ 이므로

$$D = 1 - 4a > 0 \quad \therefore a < \frac{1}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에 의하여 a 의 값의 범위는

$$a < -6 \quad \text{또는} \quad -6 < a < \frac{1}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

㉢을 부정하여 함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않도록 하는 실수 a 의 값의

$$\text{범위를 구하면 } a = -6 \quad \text{또는} \quad a \geq \frac{1}{4}$$

05. 함수의 최댓값과 최솟값

필수 예제 & 유제

필수예제 1.

정답 풀이 참조

$$(1) f(x) = 2x^3 - 3x^2 \text{에서} \\ -12x + 5$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 \\ = 6(x^2 - x - 2) \\ = 6(x+1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = -1 \quad \text{또는} \quad x = 2$$

구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 조사하여 표로 만든다.

x	-2	...	1	...	2
$f'(x)$	+	+	0	-	0
$f(x)$	1	↗	12	↘	-15

$x = -1$ 에서 극대이므로

$$\text{극댓값 : } f(-1) = 12$$

주어진 양 끝점에서 함수값은

$$f(-2) = 1, \quad f(2) = -15$$

따라서 함수의 최댓값과 최솟값은

$$x = -1 \text{일 때, 최댓값 } 12$$

$$x = 2 \text{일 때, 최솟값 } -15$$

$$(2) f(x) = x^4 - 2x^2 - 2$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x \\ = 4x(x^2 - 1) = 4x(x-1)(x+1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = -1 \quad \text{또는} \quad x = 0 \quad \text{또는} \quad x = 1$$

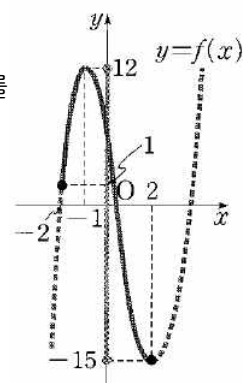
구간 $[-2, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 조사하여 표로 만든다.

x	-2	...	-1	...	0	...	1
$f'(x)$	-	-	0	+	0	-	0
$f(x)$	6	↘	-3	↗	-2	↘	-3

$x = -1$ 에서 극소, $x = 0$ 에서 극대이므로

$$\text{극솟값 : } f(-1) = -3$$

$$\text{극댓값 : } f(0) = -2$$



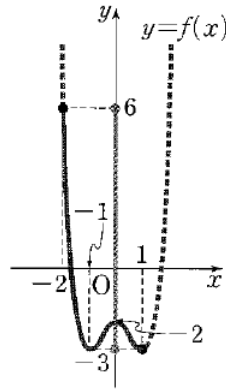
주어진 양 끝점에서 함수값은

$$f(-2)=6, f(1)=-3$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값은

$x=-2$ 일 때, 최댓값 6

$x=1$ 일 때, 최솟값 -3



유제 1. 정답 최댓값 : 20 최솟값 : 0

$$(1) f(x)=-x^3+3x^2 \text{에서}$$

$$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

구간 $[-2, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

x	-2	...	0	...	2	...	3
$f'(x)$	-	-	0	+	0	-	0
$f(x)$	20	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

위의 표를 이용하여 함수 $y=f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극대, $x=0$ 에서 극소이므로

$$\text{극댓값 : } f(2)=4$$

$$\text{극솟값 : } f(0)=0$$

주어진 양 끝점에서의 함수값은

$$f(-2)=20, f(3)=0$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값은

$x=-2$ 일 때, 최댓값 20

$x=0, x=3$ 에서 최솟값 0

$$(2) f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3 \text{에서}$$

$$f'(x)=x^3-3x^2=x^2(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=3$$

구간 $[-1, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

x	-1	...	0	...	3
$f'(x)$	-	-	0	-	0
$f(x)$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{27}{4}$

위의 표를 이용하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 그리면 오른쪽 그림과 같고, $x=0$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 극값은 없다. 주어진 구간의 양 끝점에서의 함수값은

$$f(-1)=\frac{5}{4}, f(3)=-\frac{27}{4}$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값은

$x=-1$ 일 때, 최댓값 $\frac{5}{4}$

$x=3$ 에서 최솟값 $-\frac{27}{4}$

$$(3) f(x)=x^3-6x^2+9x-1 \text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2-12x+9$$

$$=3(x^2-4x+3)$$

$$=3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

구간 $[0, \infty)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

x	0	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+
$f(x)$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$

위의 표를 이용하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같고, $x=1$ 에서 극대, $x=3$ 에서 극소이므로

$$\text{극댓값 : } f(1)=3$$

$$\text{극솟값 : } f(3)=-1$$

주어진 양 끝점에서의 함수값은

$$f(0)=-1$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값은

최댓값은 없고

$x=0, \text{ 또는 } x=3$ 에서 최솟값 -1

$$(4) f(x)=3x^4-4x^3-1 \text{에서}$$

$$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

구간 $[-2, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$

위의 표를 이용하여 함수 $y=f(x)$ 는 $x=0$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 극값을 갖지 않고 $x=1$ 에서 극소이므로

$$\text{극솟값 : } f(1)=-2$$

주어진 구간이 실수 전체이므로 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값은

최댓값은 없고

$x=1$ 일 때, 최솟값 -2

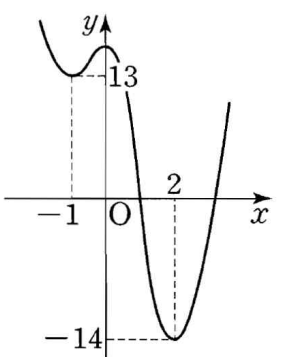
유제 2. 정답. ④

$$\text{풀이. } f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+18$$

$$f'(x)=12x^3-12x^2-24x$$

$$=12x(x+1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$



x	...	-1	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	13	$\nearrow$	18	$\searrow$	-14	$\nearrow$

따라서, 위의 표에 의하여 $y=f(x)$ 의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같고, 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최솟값 -14를 갖는다.

유제 3. 정답. ②

풀이. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 8x = 3x\left(x - \frac{8}{3}\right)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{8}{3}$$

x	-2	...	0	...	$\frac{8}{3}$	...	3
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-22	↗	2	↘	$-\frac{202}{27}$	↗	-7

위의 표에 의하여 구간 $[-2, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 일 때 최대값 2를 갖는다.

유제 4. 정답 ⑤

$f(x) = x^4 - 4x + a$ 에서

$$f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 1$$

오른쪽 표에 의해서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이면서 최소이다. 따라서, 최솟값은

x	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	$-3+a$	↗

$$f(1) = -3 + a = -1 \text{에서 } a = 2 \text{이다.}$$

필수예제 2. 정답 $a=2, b=3$

$$(1) f(x) = ax^3 - 6ax^2 + b \text{에서}$$

$$f'(x) = 3ax^2 - 12ax = 3ax(x-4)$$

$$f'(x) = 0$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = 4$$

구간 $[-1, 2]$ 에서 증가, 감소를 조사하면 오른쪽 표와 같다.

x	-1	...	0	...	2
$f'(x)$	+	+	0	-	-
$f(x)$	$-7a$	↗	b	↘	$-16a$

$x=0$ 에서 극대이므로

$$\text{극댓값 : } f(0) = b$$

주어진 구간의 양 끝점에서의 함수값은

$$f(-1) = -7a + b, f(2) = -16a + b$$

$$a > 0, b > 0 \text{이므로 } b, -7a + b,$$

$$-16a + b \text{의 대소 관계는}$$

$$-16a + b < -7a + b < b$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값은

$$\text{최댓값 : } b$$

$$\text{최솟값 : } -16a + b$$

주어진 조건에서 최댓값 3, 최솟값이 -29이므로

$$(\text{최댓값}) = b = 3$$

$$(\text{최솟값}) = -16a + b = -29$$

$$\therefore a = 2$$

유제 5. 23. 정답 1

$f(x) = 3ax^2 - ax^3$ 에서

$$f'(x) = 6ax - 3ax^2 = 3ax(2-x)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

구간 $[0, \infty)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

x	-1	...	0	...	2	...	4
$f'(x)$	-	-	0	+	0	-	-
$f(x)$	$4a$	↘	0	↗	$4a$	↘	$-16a$

$x=2$ 에서 극대, $x=0$ 에서 극소이므로

$$\text{극댓값 : } f(2) = 4a$$

$$\text{극솟값 : } f(0) = 0$$

주어진 양 끝점에서의 함수값은

$$f(-1) = 4a, f(4) = -16a$$

$a > 0$ 이므로 $4a, 0, 16a$ 의 대소 관계는

$$16a < 0 < 4a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $-16a$ 이므로

$$-16a = -4, \therefore a = \frac{1}{4}$$

①에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$$(\text{최댓값}) = 4a = 4 \times \frac{1}{4} = 1$$

유제 6. 정답 $a = \frac{1}{3}$

$f(x) = ax^4 - 4ax^3 + b$ 에서

$$f'(x) = 4ax^3 - 12ax^2 = 4ax^2(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = 3$$

구간 $[0, \infty)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

x	1	...	3	...	4
$f'(x)$	-	-	0	+	0
$f(x)$	$-3a+b$	↘	$-27a+b$	↗	b

$x=3$ 에서 극소이므로

$$\text{극솟값 : } f(3) = -27a + b$$

주어진 양 끝점에서의 함수값은

$$f(1) = -3a + b, f(4) = b$$

$a > 0$ 이므로 $-17a + b, -3a + b, b$ 의 대소 관계는

$$-27a + b < -3a + b < b$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 b , 최솟값은 $-27a + b$ 이므로

$$(\text{최댓값}) = b = 9$$

$$(\text{최솟값}) = -27a + b = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{3}$$

유제 7. 정답 2

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 극솟값 -2 를 가지므로

$$f(2) = 8 + 4a + 2b + 2 = -2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(2) = 12 + 4a + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = -3, b = 0$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 20 \text{ 이므로}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{ 에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

x	0	...	2	...	3
$f'(x)$	0	-	0	+	+
$f(x)$	2	↘	-2	↗	2

$x = 2$ 에서 극소이므로

$$\text{극솟값 : } f(2) = -2$$

주어진 양 끝점에서의 함수값은

$$f(0) = 2, f(3) = 2$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$, 또는 $x = 3$ 일 때, 최댓값 2를 가진다.

유제 8. 정답 ②

$$f(x) = ax^3 - 6ax^2 + b \text{ 에서}$$

$$f'(x) = 3ax^2 - 12ax = 3ax(x-4) = 0$$

$$f'(x) = 0 \text{ 에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = 4$$

$a > 0$ 이므로 $f(0)$ 에서 극댓값, $f(4)$ 에서 극솟값을 갖는다.

따라서, 구간 $[-1, 2]$ 에서 극값과 경계점의 함수값을 구하면

$$f(0) = b$$

$$f(-1) = -7a + b$$

$$f(2) = -16a + b$$

이므로 $x = 0$ 일 때 최댓값을 갖는다. ($\because a > 0$)

유제 9. 정답 ③

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + a \text{ 에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 12x = 6x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{ 에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

x	-2	...	0	...	2
$f'(x)$		+	0	-	0
$f(x)$	$a-40$	↗	a	↘	$a-8$

위의 표에 의하여 구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 일 때 최솟값 $a-40$ 을 가지므로

$$a-40 = -37 \text{ 에서 } a = 3$$

따라서, 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $x = 0$ 일 때 $a = 3$

유제 10. 정답 5

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + a \text{ 에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{ 을 풀면 } x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

구간 $[-2, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

x	-2	...	-1	...	3	...	4
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+	+
$f(x)$	$a-2$	↗	$a+5$	↘	$a-27$	↗	$a-20$

↑
극대

↑
극소

$x = -1$ 에서 극대, $x = 3$ 에서 극소이므로

$$\text{극대값 : } f(-1) = a+5$$

$$\text{극소값 : } f(3) = a-27$$

주어진 구간의 양 끝점에서의 함수값은

$$f(-2) = a-2, f(4) = a-20$$

$a+5, a-27, a-2, a-20$ 의 대소 관계는

$$a-27 < a-20 < a-2 < a+5$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값은

$$(\text{최댓값}) = a+5$$

$$(\text{최솟값}) = a-27$$

최댓값과 최솟값의 합이 -12 이므로

$$(a+5) + (a-27) = -12, 2a-22 = -12$$

$$\therefore a = 5$$

유제 11. 정답 $a = 1, b = 9$

$$f(x) = ax^3 - 3ax^2 + b \text{ (} a > 0 \text{)에서}$$

$$f'(x) = 3ax^2 - 6ax = 3ax(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{ 을 풀면 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

구간 $[-2, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

x	-2	...	0	...	2	...	3
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+	+
$f(x)$	$b-20a$	↗	b	↘	$b-4a$	↗	b

↑
극대

↑
극소

$x = 0$ 에서 극대, $x = 2$ 에서 극소이므로

$$\text{극댓값 : } f(0) = b$$

$$\text{극솟값 : } f(2) = b-4a$$

주어진 구간의 양 끝점에서의 함수값은

$$f(-2) = b-20a, f(3) = b$$

$a > 0$ 이므로 $b, b-4a, b-20a$ 의 대소 관계는

$$b-20a < b-4a < b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 b 이므로 $b = 9$

$\textcircled{1}$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $b-20a$ 이므로 $b-20a = -11$

$$b = 9 \text{ 이므로 } a = 1$$

유제 12. 정답 $\frac{10}{9}$

$$f(x) = -ax^4 + 4ax^3 + b \text{ (} a > 0 \text{)에서}$$

$$f'(x) = -4ax^3 + 12ax^2 = -4ax^2(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{ 을 풀면 } x = 0 \text{ 또는 } x = 3$$

구간 $[1, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

x	1	...	3	...	4
$f'(x)$	+	+	0	-	-
$f(x)$	$3a+b$	↗	$27a+b$	↘	b

↑
극대

$x = 3$ 에서 극대이므로

극대값 : $f(3) = 27a + b$
주어진 구간의 양 끝점에서의 함수값은
 $f(1) = 3a + b, f(4) = b$
 $a > 0$ 이므로 $27a + b, 3a + b, b$ 의 대소 관계는
 $b < 3a + b < 27a + b$
따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값은
(최댓값) $= 27a + b = 4$
(최솟값) $= b = 1 \cdots \cdots \textcircled{A}$
 $b = 1$ 을 $\textcircled{A}$ 에 대입하면 $a = \frac{1}{9}$
 $\therefore a + b = \frac{1}{9} + 1 = \frac{10}{9}$

유제 13. 정답 -15
 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ 에서
 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$
함수 $f(x)$ 가 $x = 1$ 에서 극대값 5를 가지므로
 $f(1) = 5, f'(1) = 0$
 $f(1) = 1 + a + b + 1 = 5 \cdots \cdots \textcircled{A}$
 $f'(1) = 3 + 2a + b = 0 \cdots \cdots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면
 $a = -6, b = 9$
 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ 이므로
 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$
 $f'(x) = 0$ 을 풀면 $3(x-1)(x-3) = 0$
 $\therefore x = 1$ 또는 $x = 3$
구간 $[-1, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

x	-1	...	1	...	3
$f'(x)$	+	+	0	-	0
$f(x)$	-15	↗	5	↘	1

$x = 1$ 에서 극대이므로
극댓값 : $f(1) = 5$
주어진 구간의 양 끝점에서의 함수값은
 $f(-1) = -15, f(3) = 1$
따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은
 $x = -1$ 일 때 최솟값 -15

필수예제 3. 정답 최댓값 1, 최솟값 -3
 $x^2 - 2x + 3 = t$ 로 놓으면
 $t = x^2 - 2x + 3$
 $= (x-1)^2 + 2$
 $0 \leq x \leq 2$ 에서 t 의 값의 범위를 구하면
 $2 \leq t \leq 3$
 $g(t) = t^3 - 3t^2 + 1$ 이라 하면
 $g'(t) = 3t^2 - 6t = 3t(t-2)$
 $g'(t) = 0$ 에서
 $t = 0$ 또는 $t = 2$
 $2 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가, 감소를 조사하면 표와 같으므로 $g(t)$ 의 최댓값과 최솟값은

x	2	...	3
$g'(t)$	0	+	+
$g(t)$	-3	↗	1

최댓값 $= g(3) = 1$
최솟값 $= g(2) = -3$

유제 14. 정답 15
 $x^2 - 4x + 4 = t$ 로 놓으면
 $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$
이므로 $x \geq 0$ 에서 t 의 값의 범위는
 $t \geq 0$
 $g(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 15$ 라 하면
 $g'(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3)$
 $g'(t) = 0$ 에서 $t = 1$ 또는 $t = 3$
 $t \geq 0$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

t	0	...	1	...	3	...
$g'(t)$	+	+	0	-	+	
$g(t)$	15	↗	19	↘	15	↗

$t = 1$ 에서 극대, $t = 3$ 에서 극소이므로
극댓값 : $g(1) = 19$ 극솟값 : $g(3) = 15$
주어진 구간의 외쪽 끝점에서 함수값은
 $g(0) = 15$
따라서 함수 $g(t)$ 의 최댓값과 최솟값은
최댓값은 없고
 $t = 0$ 또는 $t = 3$ 일 때, 최솟값 15

유제 15. 정답 최댓값 : 17 최솟값 : -15
 $x^2 - 4x + 2 = t$ 로 놓으면
 $x^2 - 4x + 2 = (x-2)^2 - 2$ 이므로 $0 \leq x \leq 4$ 일 때 t 의 값의 범위는
 $-2 \leq t \leq 2$
 $g(t) = t^3 - 12t + 1$ 이라 하면
 $g'(t) = 3t^2 - 12 = 3(t+2)(t-2)$
 $g'(t) = 0$ 을 풀면 $t = -2$ 또는 $t = 2$
구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

t	-2	...	2
$g'(t)$	0	-	0
$g(t)$	17	↘	-15

극값은 존재하지 않고, 주어진 구간의 양 끝점에서의 함수값은
 $g(-2) = 17, g(2) = -15$
따라서 함수 $g(t)$ 의 최댓값과 최솟값은
 $t = -2$ 일 때, 최댓값 17
 $t = 2$ 일 때, 최솟값 -15

유제 16. 정답 0
 $x^2 - 2x - 1 = t$ 로 놓으면
 $x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$ 이므로 $1 \leq x \leq 3$ 일 때 t 의 값의 범위는
 $-2 \leq t \leq 2$

$$g(t) = -t^3 - 3t^2 + 10 \text{이라 하면}$$

$$g'(t) = -3t^2 - 6t = -3t(t+2)$$

$$g'(t) = 0 \text{을 풀면 } t = -2 \text{ 또는 } t = 0$$

구간 $[-2, 2]$ 에서 $g(t)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

t	-2	...	0	...	2
$g'(t)$	0	+	0	-	-
$g(t)$	6	↗	10	↘	-10

$t = 0$ 에서 극대이므로

$$\text{극대값 : } g(0) = 10$$

주어진 구간의 양 끝점에서의 함수값은

$$g(-2) = 6, g(2) = -10$$

따라서 함수 $g(t)$ 의 최댓값과 최솟값은

$$t = 0 \text{일 때, 최댓값 } 10$$

$$t = 2 \text{일 때, 최솟값 } -10$$

$$\text{그러므로 함수 } g(t) \text{의 최댓값과 최솟값의 합은 } 10 + (-10) = 0$$

필수예제 4. 정답 최댓값 $= g(-1) = 18$ 최솟값 $= g(\frac{1}{2}) = -\frac{9}{4}$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \text{이므로}$$

$$f(x) = 4\sin^3 x - 9(1 - \sin^2 x) - 12\sin x + 10$$

$$= 4\sin^3 x + 9\sin^2 x - 12\sin x + 10$$

$$\sin x = t \text{로 놓으면 } -1 \leq \sin x \leq 1 \text{이므로 } t \text{의 값의 범위는}$$

$$-1 \leq t \leq 1$$

$$g(t) = 4t^3 + 9t^2 - 12t + 10 \text{이라 하면}$$

$$g'(t) = 12t^2 + 18t - 12$$

$$= 6(2t-1)(t+2)$$

$$g'(t) = 0 \text{에서}$$

$$t = \frac{1}{2} \text{ 또는 } t = -2$$

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가, 감소를 조사하면 오른쪽 표와 같

으므로 함수 $g(t)$ 의 최댓값과 최솟값은

t	-1	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$g'(t)$	-	-	0	+	+
$g(t)$	18	↘	$-\frac{9}{4}$	↗	2

$$\text{최댓값 } = g(-1) = 18$$

$$\text{최솟값 } = g(\frac{1}{2}) = -\frac{9}{4}$$

유제 17. 정답 풀이 참조

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \text{이므로}$$

$$f(x) = \sin x(1 - \sin^2 x) = -\sin^3 x + \sin x$$

$$\sin x = t \text{로 놓으면 } -1 \leq x \leq 1 \text{이므로 } t \text{의 값의 범위는}$$

$$-1 \leq t \leq 1$$

$$g(t) = -t^3 + t \text{라 하면}$$

$$g'(t) = -3t^2 + 1 = -3(t^2 - \frac{1}{3})$$

$$= -3\left(t + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(t - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$g'(t) = 0 \text{에서}$$

$$t = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 또는 } t = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

t	-1	...	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	...	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	...	1
$g'(t)$	-	-	0	+	0	-	-
$g(t)$	0	↘	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	0

$$t = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{에서 극대, } t = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{에서 극소이므로}$$

$$\text{극댓값 : } g(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$\text{극솟값 } g(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

주어진 구간의 양 끝 점에서의 함수값은

$$g(-1) = 0, g(1) = 0$$

따라서 함수 $g(t)$ 의 최댓값과 최솟값은

$$t = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{일 때, 최댓값 } \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$t = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 최솟값 } -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

유제 18. 정답 ③

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \text{이므로}$$

$$f(x) = \sin^3 x + 3(1 - \sin^2 x) - 1 = \sin^3 x - 3\sin^2 x + 2$$

여기서 $\sin x = t$ 로 놓으면 t 의 값의 범위는 $-1 \leq t \leq 1$

$$g(t) = t^3 - 3t^2 + 2 \text{라 하면}$$

$$g'(t) = 3t^2 - 6t = 3t(t-2)$$

$$g'(t) = 0 \text{을 풀면 } t = 0 \text{ 또는 } t = 2$$

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

t	-1	...	0	...	1
$g'(t)$	+	+	0	-	-
$g(t)$	-2	↗	2	↘	0

$t = 0$ 에서 극대이므로

$$\text{극댓값 : } g(0) = 2$$

주어진 구간의 양 끝점에서의 함수값은

$$g(-1) = -2, g(1) = 0$$

따라서 함수 $g(t)$ 의 최댓값과 최솟값은

$$t = 0 \text{일 때, 최댓값 } 2$$

$$t = -1 \text{일 때, 최솟값 } -2$$

$$\text{그러므로 함수 } g(t) \text{의 최댓값과 최솟값의 합은 } 2 + (-2) = 0$$

유제 19. 정답 최댓값 : 11 최솟값 : -9

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \text{이므로}$$

$$f(x) = 2\cos^3 x + 3(1 - \cos^2 x) - 12\cos x + 1$$

$$= 2\cos^3 x - 3\cos^2 x - 12\cos x + 4$$

여기서 $\cos x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x \leq \pi$ 에서 $\cos x$ 의 값의 범위는

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \text{이므로 } t \text{의 값의 범위는}$$

$$-1 \leq t \leq 1$$

$$g(t) = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 4 \text{라 하면}$$

$$g'(t) = 6t^2 - 6t - 12 = 6(t+1)(t-2)$$

$$g'(t) = 0 \text{을 풀면 } t = -1 \text{ 또는 } t = 2$$

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

t	-1	...	1
$g'(t)$	0	-	-
$g(t)$	11	↘	-9

극값은 존재하지 않고, 주어진 구간의 양 끝점에서 함수값은

$$g(-1) = 11, \quad g(1) = -9$$

따라서 함수 $g(t)$ 의 최대값과 최소값은

$$t = -1 \text{일 때, 최대값 } 11$$

$$t = 1 \text{일 때, 최소값 } -9$$

유제 20. 정답 ④

$\cos^2 = 1 - \sin^2 x$ 이므로 주어진 함수는

$$f(x) = 4\sin^3 x + 3\cos^2 x + 2$$

$$= 4\sin^3 x - 3\sin^2 x + 5$$

$\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고 주어진 함수 $f(x)$ 를 t 에 대한 함수 $g(t)$ 로 나타내면

$$g(t) = 4t^3 - 3t^2 + 5$$

$$\therefore g'(t) = 12t^2 - 6t = 6t(2t - 1)$$

$$g'(t) = 0 \text{에서 } t = 0 \text{ 또는 } t = \frac{1}{2}$$

t	-1	...	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$g'(t)$		+	0	-	0	+	
$g(t)$	-2	↗	5	↘	$\frac{19}{4}$	↗	6

위의 표에 의하여 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 함수 $g(t)$ 는 $t = 1$ 일 때 최댓값 6, $t = -1$ 일 때 최솟값 -2를 가진다.

따라서, $M = 6, m = -2$ 이므로

$$M + m = 6 + (-2) = 4$$

유제 21. 정답 ④

$$= -\sin^3 x + \sin x \quad f(x) = \sin x (1 - \sin^2 x)$$

$\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고 주어진 함수 $f(x)$ 를 t 에 대한 함수 $g(t)$ 로 나타내면

$$g(t) = -t^3 + t \text{에서}$$

$$g'(t) = -3t^2 + 1 = -3\left(t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$g'(t) = 0 \text{에서 } t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

t	-1	...	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	1
$g'(t)$		-	0	+	0	-	
$g(t)$	0	↘	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	0

위의 표에 의하여 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 함수 $g(t)$ 는

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{일 때 최댓값 } \frac{2\sqrt{3}}{9} \text{을 갖는다.}$$

필수예제 1. 정답 3

$\log_2 x + \log_4 y$ 의 진수 조건을 구하면

$$x > 0, \quad y = 12 - 2x > 0$$

$$(\because 2x + y = 12)$$

$$\therefore 0 < x < 6 \quad \text{..... ㉠}$$

$\log_2 x + \log_4 y$ 를 정리하면

$$\log_2 x + \log_4 y = \log_4 x^2 + \log_4 y$$

$$= \log_4 x^2 y \quad \text{..... ㉡}$$

$2x + y = 12$ 에서 $y = 12 - 2x$ 를 ㉡에 대입하면

$$\log_4 x^2 y = \log_4 x^2 (12 - 2x)$$

$$= \log_4 (12x^2 - 2x^3)$$

$$f(x) = 12x^2 - 2x^3 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 24x - 6x^2 = -6x(x - 4)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = 4 (\because \text{㉠})$$

$0 < x < 6$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 조사하면 오른쪽 표와 같다.

x	0	...	4	...	6
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	64	↘	2

위의 증감표에서 $f(x)$ 는 $x = 4$ 에서 극대이면서 최대이므로

$$f(x) \text{의 최댓값 } \rightarrow f(4) = 64$$

$$\log_2 x + \log_4 y = \log_4 f(x) \text{에서}$$

$$(\text{밑})=4 > 1 \text{이므로 } f(x) \text{의 최대이면 } \log_2 x + \log_4 y \text{도 최대}$$

따라서 $\log_2 x + \log_4 y$ 의 최댓값은

$$\log_4 f(4) = \log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$$

유제 22. 정답 풀이 참조

$2\log_6 x + \log_6 y$ 의 진수 조건을 구하면

$$x > 0, \quad y = 3 - \frac{x}{3} > 0 \quad (\because x + 3y = 9)$$

$$\therefore 0 < x < 9 \quad \text{..... ㉠}$$

$2\log_6 x + \log_6 y$ 를 정리하면

$$2\log_6 x + \log_6 y = \log_6 x^2 + \log_6 y$$

$$= \log_6 x^2 y \quad \text{..... ㉡}$$

$$x + 3y = 9 \text{에서 } y = 3 - \frac{x}{3} \text{를 ㉡에 대입하면}$$

$$\log_6 x^2 y = \log_6 x^2 \left(3 - \frac{x}{3}\right)$$

$$f(x) = x^2 \left(3 - \frac{x}{3}\right) = 3x^2 - \frac{x^3}{3} \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 6x - x^2 = -x(x - 6)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 6 \quad (\because \text{㉠})$$

$0 < x < 9$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

x	0	...	6	...	9
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	36	↘	

$f(x)$ 는 $x=6$ 에서 극대이면서 최대이므로 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(x)$ 의 최댓값 : $f(6)=36$
 이 때, $2\log_6x+\log_6y=\log_6f(x)$ 에서 (밑)=6>1이므로 $f(x)$ 가 최대가 되면 $2\log_6x+\log_6y$ 도 최대이다.
 따라서 $2\log_6x+\log_6y$ 의 최댓값은 $\log_6f(6)=\log_636=\log_66^2=2$

유제 23. 정답 풀이 참조

$2x-y=2$ 에서 $y=2x-2$
 $y=2x-2$ 를 x^2y 에 대입하면 $x^2y=x^2(2x-2)=2x^3-2x^2$
 $f(x)=2x^3-2x^2$ 이라 하면 $f'(x)=6x^2-4x=2x(3x-2)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=\frac{3}{2}$ ($\because x>0$)
 $x>0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

x	0	...	$\frac{2}{3}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	$-\frac{8}{27}$	↗

$f(x)$ 는 $x=\frac{2}{3}$ 에서 극소이면서 최소이므로 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(x)$ 의 최솟값 : $f(\frac{2}{3})=-\frac{8}{27}$

유제 24. 정답 15

$x^2-x+y-6=0$ 에서 $y=-x^2+x+6$ ㉠
 $y\geq 4$ 이므로 $y=-x^2+x+6\geq 4$
 $x^2-x-2\leq 0, (x+1)(x-2)\leq 0$
 $\therefore -1\leq x\leq 2$
 그런데 주어진 조건에서 $x\geq 0$ 이므로 $0\leq x\leq 2$ ㉡
 이 때, ㉠을 $xy-5x+8$ 에 대입하면 $xy-5x+8=x(-x^2+x+6)-5x+8$
 $=-x^3+x^2+x+8$
 $f(x)=-x^3+x^2+x+8$ 이라 하면 $f'(x)=-3x^2+2x+1=-(3x+1)(x-1)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=1$ ($\because$ ㉠)
 $0\leq x\leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

x	0	...	1	...	2
$f'(x)$	+	+	0	-	-
$f(x)$	8	↗	9	↘	6

$f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이므로
 극댓값 : $f(1)=9$
 주어진 구간의 양 끝점에서의 함수값은 $f(0)=8, f(2)=6$
 따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값은 $x=1$ 일 때, 최댓값 9
 $x=2$ 일 때, 최솟값 6
 $\therefore$ (최댓값) +(최솟값)=9+6=15

유제 25. 정답:㉠

$x^2+3y^2=9$ 에서 $y^2=\frac{1}{3}(9-x^2)$ ㉠, $y^2\geq 0$ 이므로 $-3\leq x\leq 3$ ㉡
 주어진 식에 ㉠을 대입한 식을 $f(x)$ 라 하면 $f(x)=x(x+y^2)$
 $=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x$
 $f'(x)=-x^2+2x+3=-(x+1)(x-3)$
 ㉡의 범위에서 $f(x)$ 의 증감표를 만들면

x	-3	...	-1	...	3
$f'(x)$		-	0	+	0
$f(x)$	9	↘	$-\frac{5}{3}$	↗	9

따라서 주어진 식의 최소값은 $-\frac{5}{3}$ 이다.

06. 최대·최소의 활용

필수예제 & 유제

필수예제 1. 정답 $12\sqrt{3}$

점 A의 x좌표를 a라 하면

$$A(a, 9-a^2) \quad (0 < a < 3)$$

$$\overline{AB} \text{의 길이는 } \overline{AB} = 2a$$

$$\overline{AD} \text{의 길이는 } \overline{AD} = 9-a^2$$

$\square ABCD$ 의 넓이를 $S(a)$ 라 하면

$$S(a) = 2a(9-a^2) = -2a^3 + 18a$$

$S'(a)$ 를 구하면

$$\begin{aligned} S'(a) &= -6a^2 + 18 \\ &= -6(a - \sqrt{3})(a + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$S'(a) = 0 \text{에서 } a = \sqrt{3} \quad (\because 0 < a < 3)$$

$0 < a < 3$ 에서 함수 $S(a)$ 의 증가, 감소를 조사하면 아래의 표와 같다.

a	0	...	$\sqrt{3}$	...	3
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		$\nearrow$	$12\sqrt{3}$	$\searrow$	

함수 $S(a)$ 는 $a = \sqrt{3}$ 에서 극대이면서 최대이므로

$$(\text{최댓값}) = S(\sqrt{3}) = 12\sqrt{3}$$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 $12\sqrt{3}$

유제 1. 정답 8

주어진 조건을 좌표평면에 나타내면

오른쪽 그림과 같다. 이 때, 제1 사분

면에 있는 직사각형의 꼭지점을

$P(x, y)$ 라 하면 점 P는 곡선

$$y = 3 - x^2 \text{ 위의 점이므로 } P(x, 3 - x^2)$$

그런데 $x > 0, y = 3 - x^2 > 0$ 이므로

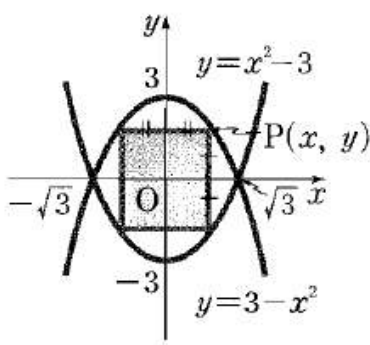
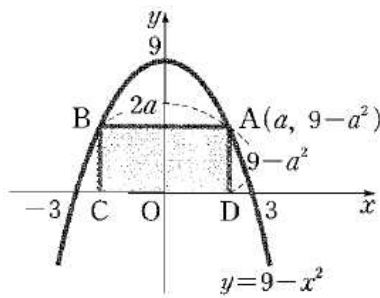
$$0 < x < \sqrt{3}$$

직사각형의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = 2x \cdot 2y = 4x(3 - x^2) = 4(3x - x^3)$$

$S'(x)$ 를 구하면

$$S'(x) = 4(3 - 3x^2) = -12(x + 1)(x - 1)$$



$$S'(x) = 0 \text{에서 } x = 1 \quad (\because 0 < x < \sqrt{3})$$

$0 < x < \sqrt{3}$ 에서 함수 $S(x)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음표와 같다.

x	0	...	1	...	$\sqrt{3}$
$S'(x)$		+	0	-	
$S(x)$		$\nearrow$	8	$\searrow$	

함수 $S(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극대이면서 최대이므로 $S(x)$ 의 최댓값은
(최댓값) $= S(1) = 8$

따라서 직사각형의 최대 넓이는 8이다.

유제 2. 정답 55

포물선 $y = x^2 + 1$ 위의 점 P의 x좌표를 a라 하면 $P(a, a^2 + 1)$

$\overline{AP}^2$ 을 구하면

$$\overline{AP}^2 = a^2 + (a^2 + 1 - 1)^2 = a^4 + a^2$$

$\overline{BP}^2$ 을 구하면

$$\overline{BP}^2 = (a - 8)^2 + (a^2 + 1)^2 = a^4 + 3a^2 - 16a + 65$$

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = f(a)$ 라 하면

$$f(a) = (a^4 + a^2) + (a^4 + 3a^2 - 16a + 65) = 2a^4 + 4a^2 - 16a + 65$$

$f'(a)$ 를 구하면

$$f'(a) = 8a^3 + 8a - 16 = 8(a - 1)(a^2 + a + 2)$$

$$f'(a) = 0 \text{을 풀면 } a = 1 \quad (\because a^2 + a + 2 > 0)$$

함수 $f(a)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

a	...	1	...
$f'(a)$	-	0	+
$f(a)$	$\searrow$	55	$\nearrow$

$a = 1$ 에서 극소이므로

$$\text{극소값} : f(1) = 55$$

따라서 $f(a) = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 최솟값은

$a = 1$ 일 때 최솟값 55

유제 3. 정답 32

$B(a, 0), C(b, 0)$ 이라 하면

$$A(a, -a^2 + 6a + 3), D(b, -b^2 + 6b + 3)$$

$\square ABCD$ 가 직사각형이므로 $\overline{AB} = \overline{CD}, \overline{AD} = \overline{BC}$

(i) $\overline{AB} = \overline{CD}$ 에서

$$-a^2 + 6a + 3 = -b^2 + 6b + 3$$

$$a^2 - b^2 - 6a + 6b = 0,$$

$$(a - b)(a + b - 6) = 0$$

$$a \neq b \text{이므로 } a + b - 6 = 0$$

$$\therefore b = -a + 6 \quad \cdots \text{㉠}$$

(ii) $\overline{AD} = \overline{BC} = b - a = -2a + b \quad (\because \text{㉠})$

$$b > 0, b - a > 0, -a^2 + 6a + 3 > 0 \text{이므로}$$

$$a < 6, a < 3, 3 - 2\sqrt{3} < a < 3 + 2\sqrt{3}$$

$$\therefore 3 - 2\sqrt{3} < a < 3$$

$\square ABCD$ 의 넓이를 $f(a)$ 라 하면

$$\begin{aligned} f(a) &= \overline{BC} \times \overline{AB} = (-2a + 6)(-a^2 + 6a + 3) \\ &= 2a^3 - 18a^2 + 30a + 18 \end{aligned}$$

$f'(a)$ 를 구하면

$$f'(a) = 6a^2 - 36a + 30 = 6(a-1)(a-5)$$

$f'(a) = 0$ 을 풀면 $a = 1$ 또는 $a = 5$

$3 - 2\sqrt{3} < a < 3$ 에서 함수 $f(a)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

a	$3 - 2\sqrt{3}$	...	1	...	3
$f'(a)$		+	0	-	
$f(a)$		↗	32	↘	

$a = 1$ 에서 극대이므로

극댓값 : $f(1) = 32$

주어진 구간의 양 끝점에서의 함수값이 존재하지 않으므로 구하는 함수

$f(a)$ 의 최댓값은 $a = 1$ 일 때, 최댓값 32

유제 4. 정답 32

$$9 - x^2 = 0 \text{에서 } x = \pm 3$$

$$\therefore A(-3, 0), B(3, 0)$$

점 C의 x 좌표를 a 라 하면

$$C(a, 9 - a^2) (0 < a < 3)$$

$$\overline{AB} \text{의 길이는 } \overline{AB} = 6$$

$$\overline{CD} \text{의 길이는 } \overline{CD} = 2a$$

사다리꼴 $ABCD$ 의 넓이를 $f(a)$ 라 하면

$$f(a) = \frac{1}{2}(6 + 2a)(9 - a^2) = -a^3 - 3a^2 + 9a + 27$$

$f'(a)$ 를 구하면

$$f'(a) = -3a^2 - 6a + 9 = -3(a+3)(a-1)$$

$f'(a) = 0$ 을 풀면 $a = -3$ 또는 $a = 1$

$0 < a < 3$ 에서 함수 $f(a)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

a	0	...	1	...	3
$f'(a)$		+	0	-	
$f(a)$		↗	32	↘	

$a = 1$ 에서 극대이므로 극댓값 : $f(1) = 32$

주어진 구간의 양 끝점에서의 함수값이 존재하지 않으므로 구하는 함수 $f(a)$ 의 최댓값은 $a = 1$ 일 때, 최댓값 32

유제 5. 정답 90

점 P 의 x 좌표를 a 라 하면 $P(a, a^2 + 1)$

따라서 두 점 $O(0, 0)$, $A(10, 0)$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \overline{OP^2} + \overline{AP^2} &= a^2 + (a^2 + 1)^2 + (a - 10)^2 + (a^2 + 1)^2 \\ &= a^4 + 3a^2 + 1 + a^4 + 3a^2 - 20a + 101 \\ &= 2a^4 + 6a^2 - 20a + 102 \end{aligned}$$

이때, $\overline{OP^2} + \overline{AP^2} = f(a)$ 라 하면 $f(a) = 2a^4 + 6a^2 - 20a + 102$

$f'(a)$ 를 구하면 $f'(a) = 8a^3 + 12a - 20$

조립제법을 이용하여 인수분해 하면

1	8	0	12	-20
		8	8	20
	8	8	20	0

$$\begin{aligned} \therefore f'(a) &= (a-1)(8a^2 + 8a + 20) \\ &= 4(a-1)(2a^2 + 2a + 5) \end{aligned}$$

$$f'(a) = 0 \text{에서 } a = 1 \left(\because 2a^2 + 2a + 5 = 2\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} > 0 \right)$$

함수 $f(a)$ 의 증가, 감소를 조사하면 아래 표와 같다.

a	...	1	...
$f'(a)$	-	0	+
$f(a)$	↘	90	↗

함수 $f(a)$ 는 $a = 1$ 에서 극소이면서 최소이므로 $f(a)$ 의 최솟값은 (최소값) $=f(1)=90$

따라서 $\overline{OP^2} + \overline{AP^2}$ 의 최솟값은 90이다.

필수예제 2. 정답 2000 cm^3

잘라 낸 정사각형의 한 변의 길이가 $x \text{ cm}$ 이므로 상자의 밑면의 가로와 세로의 길이를 각각 구하면

$$(\text{가로의 길이}) = (30 - 2x) \text{ cm}$$

$$(\text{세로의 길이}) = (30 - 2x) \text{ cm}$$

각 변의 길이는 0보다 커야 하므로 $x > 0$, $30 - 2x > 0 \therefore 0 < x < 15$
상자의 부피를 $V(x)$ 라 하면

$$V(x) = (30 - 2x)^2 \times x = 4x^3 - 120x^2 + 900x$$

$$V'(x) \text{를 구하면 } V'(x) = 12x^2 - 240x + 900 = 12(x-5)(x-15)$$

$$V'(x) = 0 \text{에서 } x = 5 \quad (\because 0 < x < 15)$$

$0 < x < 15$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가, 감소를 조사하면 아래 표와 같다.

x	0	...	5	...	15
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		↗	2000	↘	

함수 $V(x)$ 는 $x = 5$ 에서 극대이면서 최대이므로

$$(\text{최댓값}) = f(5) = 2000$$

따라서 상자의 부피의 최댓값은 2000 cm^3

유제 6. 정답 $\frac{5}{3} \text{ cm}$

잘라 낸 정사각형의 한 변의 길이를 $x \text{ cm}$ 라 하면 상자의 밑면의 가로와 세로의 길이는

$$(\text{가로의 길이}) = (15 - 2x) (\text{cm})$$

$$(\text{세로의 길이}) = (8 - 2x) (\text{cm})$$

각 변의 길이는 0보다 커야 하므로

$$x > 0, 8 - 2x > 0, 15 - 2x > 0$$

$$\therefore 0 < x < 4$$

상자의 부피를 $V(x)$ 라 하면

$$V(x) = x(8 - 2x)(15 - 2x)$$

$$= 2(2x^3 - 23x^2 + 60x)$$

$V'(x)$ 를 구하면

$$V'(x) = 2(6x^2 - 46x + 60)$$

$$= 4(3x - 5)(x - 6)$$

$$V'(x) = 0 \text{에서 } x = \frac{5}{3} (\because 0 < x < 4)$$

$0 < x < 4$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

x	0	...	$\frac{5}{3}$	...	4
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		↗	극대	↘	

함수 $V(x)$ 는 $x = \frac{5}{3}$ 에서 극대이면서 최대이므로 상자의 부피가 최대가 되도록 할 때, 잘라 낼 정사각형의 한변의 길이는 $\frac{5}{3}cm$ 이다.

유제 7. 정답 $\frac{20\sqrt{5}}{9}cm^3$

직육면체의 밑면의 한 변의 길이를 xcm , 높이를 y 라 하면 직육면체를 만드는데 드는 비용은
 $\{(밑면의넓이)+4\times(옆면의넓이)\}\times 10+(윗면의넓이)\times 20$
 $= (x^2+4xy)\times 10+x^2\times 20$
 $= 30x^2+40xy$
 주어진 조건에서 직육면체를 만드는데 드는 비용은 200원 이므로
 $30x^2+40xy=200, 3x^2+4xy=20$

$$\therefore y = \frac{1}{4x}(20-3x^2) \quad \dots\dots\textcircled{7}$$

직육면체의 밑면의 변의 길이와 높이는 0보다 커야 하므로

$$x > 0, \frac{1}{4x}(20-3x^2) > 0$$

$$\therefore 0 < x < \frac{2\sqrt{15}}{3}$$

직육면체의 부피를 $V(x)$ 라 하면

$$V(x) = x^2y = x^2 \cdot \frac{1}{4x}(20-3x^2) (\because \textcircled{7})$$

$$= \frac{1}{4}(20x-3x^3)$$

$V'(x)$ 를 구하면

$$V'(x) = \frac{1}{4}(20-9x^2)$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{20}-3x)(\sqrt{20}+3x)$$

$$V'(x)=0에서 \quad x = \frac{2\sqrt{5}}{3} \left(\because 0 < x < \frac{2\sqrt{15}}{3} \right)$$

$0 < x < \frac{2\sqrt{15}}{3}$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

x	0	...	$\frac{2\sqrt{5}}{3}$	...	$\frac{2\sqrt{15}}{3}$
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		↗	$\frac{20\sqrt{5}}{9}$	↘	

함수 $V(x)$ 는 $x = \frac{2\sqrt{5}}{3}$ 에서 극대이면서 최대이므로 $V(x)$ 의 최댓값은

$$(최댓값) = V\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{1}{4}\left\{20 \times \frac{2\sqrt{5}}{3} - 3\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^3\right\}$$

$$= \frac{20\sqrt{5}}{9}$$

따라서 상자의 최대 부피는 $\frac{20\sqrt{5}}{9}cm^3$ 이다.

유제 8. 정답 ②

오른쪽 그림과 같이 점 O 에서 $\overline{AB}$ 에 내린 수선의 발을 D 라 하자.
 $\overline{BD} = a (0 < a < 2)$ 라 하면

$$\overline{OD} = \sqrt{4-a^2}$$

$\triangle ACB$ 와 $\triangle AOB$ 의 넓이가 같으므로

$$\triangle ACB = \triangle AOB = \frac{1}{2}\overline{AB} \times \overline{OD}$$

$$= a\sqrt{4-a^2} = \sqrt{a^2(4-a^2)}$$

$f(a) = a^2(4-a^2) = 4a^2 - a^4$ 이라 하면 $f(a)$ 가 최대일 때 삼각형 ACB 의 넓이가 최대가 된다.

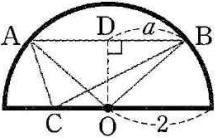
$f'(a)$ 를 구하면

$$f'(a) = 8a - 4a^3 = 4a(2-a^2)$$

$$f'(a)=0을 풀면 \quad a=0 \text{ 또는 } a=\pm\sqrt{2}$$

$0 < a < 2$ 에서 함수 $f(a)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

a	0	...	$\sqrt{2}$	...	2
$f'(a)$		+	0	-	
$f(a)$		↗	4	↘	



함수 $f(a)$ 는 $a = \sqrt{2}$ 일 때 극대이면서 최대이므로 함수 $f(a)$ 는 최댓값 4를 갖는다.

따라서 삼각형 ACB 의 넓이의 최댓값은 $\sqrt{2(4-2)} = 2$

유제 9. 정답 $16cm^3$

잘라 낼 정사각형의 한 변의 길이가 xcm 이므로 상자의 밑면의 가로와 세로의 길이는

$$(가로의 길이) = (6-2x)cm$$

$$(세로의 길이) = (6-2x)cm$$

$$x > 0, 6-2x > 0이므로$$

$$0 < x < 3$$

상자의 부피를 $f(x)cm^3$ 라 하면

$$f(x) = x(6-2x)^2 = 4(x^3-6x^2+9x)$$

$f'(x)$ 를 구하면

$$f'(x) = 4(3x^2-12x+9) = 12(x^2-4x+3) = 12(x-1)(x-3)$$

$$f'(x)=0을 풀면 \quad x=1(\because 0 < x < 3)$$

구간 $(0,3)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

x	0	...	1	...	3
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	16	↘	

함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극대이면서 최대이므로 상자의 부피의 최댓값은 $16cm^3$ 이다.

유제 10. 정답 32

오른쪽 그림과 같이 정삼각형의 꼭지점으로부터 거리가 $x (0 < x < 6)$ 인 부분까지 자른다고 하면 삼각기둥의 밑면은 한 변의 길이가 $12-2x$ 인 정삼각형이므로 그 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(12-2x)^2 = \sqrt{3}(6-x)^2$$

이 때, 상자의 높이는

$$x \cdot \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}x$$

이므로 상자의 부피를 $V(x)$ 라 하면

$$V(x) = \sqrt{3}(6-x)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}x = x(x-6)^2$$

$V'(x)$ 를 구하면

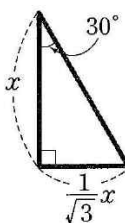
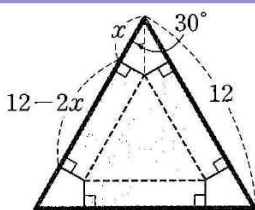
$$V'(x) = (x-6)^2 + x \cdot 2(x-6) = 3(x-2)(x-6)$$

$$V'(x) = 0 \text{을 풀면 } x=2 \text{ 또는 } x=6$$

구간 $(0,6)$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

x	0	...	2	...	6
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		↗	32	↘	

함수 $V(x)$ 는 $x=2$ 일 때 극대이면서 최대이므로 상자의 부피의 최댓값은 32이다.



유제 11. 정답 ④

원뿔에서 밑면의 반지름의 길이를 rcm , 높이를 hcm 라 하면

$$r+h=30(cm)$$

$$\therefore h=(30-r)cm(0 < r < 30)$$

원뿔의 부피를 $f(r)cm^3$ 라 하면

$$f(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}r^2(30-r) = \frac{\pi}{3}(30r^2 - r^3)$$

$f'(r)$ 를 구하면

$$f'(r) = \frac{\pi}{3}(60 - 3r^2) = \pi r(20-r)$$

$f'(r)=0$ 을 풀면

$$r=20(\because 0 < r < 30)$$

구간 $(0,30)$ 에서 함수 $f(r)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

r	0	...	20	...	30
$f'(r)$		+	0	-	
$f(r)$		↗	극대	↘	

함수 $f(r)$ 는 $r=20$ 에서 극대이면서 최대이므로 원뿔의 부피가 최대일 때의 밑면의 반지름의 길이는 20cm이다.

유제 12. 정답 $64cm^3$

$x=(12-2y)cm$, $z=(6-y)cm$ 이고, $x>0$, $y>0$, $z>0$ 이므로 $0 < y < 6$

직육면체의 부피를 $V(y)cm^3$ 라 하면

$$V(y) = xyz = (12-2y)y(6-y) = 2y^3 - 24y^2 + 72y$$

$V'(y)$ 를 구하면

$$V'(y) = 6y^2 - 48y + 72 = 6(y-2)(y-6)$$

$$V'(y)=0 \text{을 풀면 } y=2 \text{ 또는 } y=6$$

$0 < y < 6$ 에서 함수 $V(y)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

y	0	...	2	...	6
$V'(y)$		+	0	-	
$V(y)$		↗	64	↘	

함수 $V(y)$ 는 $y=2$ 에서 극대이면서 최대이므로 직육면체의 부피의 최댓값은 $64cm^3$ 이다.

필수예제 3. 정답 $20\pi cm^3$

오른쪽 그림과 같이 직원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r , 높이를 h 라 하면

$\triangle AOB \sim \triangle AO'B'$ 이므로

$$15:(15-h)=3:r$$

$$3(15-h)=15r$$

$$\therefore h=15-5r \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

반지름의 길이와 높이는 0보다 커야 하므로

$$r>0, h=15-5r>0 \quad \therefore 0 < r < 3$$

직원기둥의 부피를 $V(r)$ 이라 하면

$$V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2(15-5r) (\because \textcircled{1}) \\ = \pi(15r^2 - 5r^3)$$

$V'(r)$ 을 구하면

$$V'(r) = \pi(30r - 15r^2) \\ = 15\pi r(2-r)$$

$$V'(r)=0 \text{에서 } r=2(\because 0 < r < 3)$$

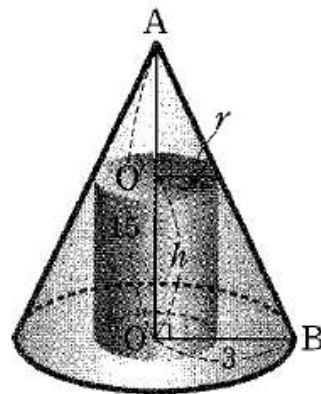
$0 < r < 3$ 에서 함수 $V(r)$ 의 증가, 감소를 조사하면 아래 표와 같다.

r	0	...	2	...	3
$V'(r)$		+	0	-	
$V(r)$		↗	20π	↘	

함수 $V(r)$ 은 $r=2$ 에서 극대이면서 최대이므로

$$(\text{최댓값})=V(2)=20\pi$$

따라서 직원기둥의 부피의 최댓값은 $20\pi cm^3$



유제 13. 정답 128

다음 그림과 같이 정사각기둥의 밑면의 한 변의 길이를 x , 높이를 h 라 하자.

이때, 정사각기둥의 밑면의 대각선의 길이는

$$\sqrt{x^2+x^2} = \sqrt{2}x$$

이므로

$$\overline{A'B'} = \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

$\triangle OAB \sim \triangle OA'B'$ 이므로

$$12:(12-h)=6:\frac{\sqrt{2}}{2}x$$

$$6(12-h)=6\sqrt{2}x$$

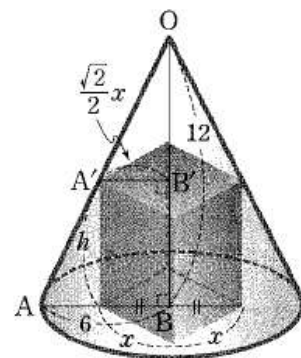
$$\therefore h=12-\sqrt{2}x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

정사각기둥의 밑면의 변의 길이와 높이는 0보다 커야 하므로

$$x>0, h=12-\sqrt{2}x>0 \quad \therefore 0 < x < 6\sqrt{2}$$

정사각기둥의 부피를 $V(x)$ 라 하면

$$V(x) = x^2 h = x^2(12-\sqrt{2}x) (\because \textcircled{1})$$



$$= 12x^2 - \sqrt{2}x^3$$

$V'(x)$ 를 구하면

$$V'(x) = 24x - 3\sqrt{2}x^2 = 3x(8 - \sqrt{2}x)$$

$$V'(x) = 0 \text{에서 } x = 4\sqrt{2} (\because 0 < x < 6\sqrt{2})$$

$0 < x < 6\sqrt{2}$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

x	0	...	$4\sqrt{2}$	...	$6\sqrt{2}$
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		↗	128	↘	

함수 $V(x)$ 는 $x = 4\sqrt{2}$ 일 때 극대이면서 최대이므로 $V(x)$ 의 최댓값은

$$(\text{최대값}) = V(4\sqrt{2}) = 12 \times (4\sqrt{2})^2 - \sqrt{2}(4\sqrt{2})^3 = 128$$

따라서 정사각기둥의 부피의 최댓값은 128이다.

유제 14. 정답 2 : 1

$r + h = a$ (일정)라 하면 $h = a - r$ ㉠

반지름의 길이와 높이는 0보다 커야 하므로

$$r > 0, h = a - r > 0 \quad \therefore 0 < r < a$$

직원기둥의 부피를 $V(r)$ 이라 하면

$$V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2 (a - r) (\because \text{㉠}) \\ = \pi(ar^2 - r^3)$$

$V'(r)$ 을 구하면

$$V'(r) = \pi(2ar - 3r^2) = \pi r(2a - 3r)$$

$$V'(r) = 0 \text{에서 } r = \frac{2}{3}a (\because 0 < r < a)$$

$0 < r < a$ 에서 함수 $V(r)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

r	0	...	$\frac{2}{3}a$	...	a
$V'(r)$		+	0	-	
$V(r)$		↗	극대	↘	

함수 $V(r)$ 은 $r = \frac{2}{3}a$ 에서 극대이면서 최대가 된다.

$$\therefore r : h = r : (a - r) = \frac{2}{3}a : \frac{1}{3}a = 2 : 1$$

유제 15. 정답 ⑤

오른쪽 그림과 같이 원뿔에 내접하는 원기둥의 밑면의 반지름의 길이와 높이를 각각 r, h 라 하면 $\triangle AOB \sim \triangle AO'B'$ 이므로

$$(18 - h) : 18 = r : 3$$

$$18r = 3(18 - h)$$

$$\therefore h = 18 - 6r (0 < r < 3)$$

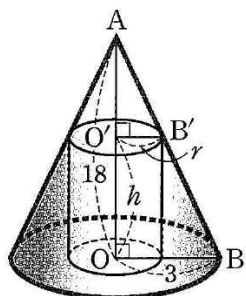
기둥의 부피를 $V(r)$ 라 하면

$$V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2 (18 - 6r) \\ = -6\pi(r^3 - 3r^2)$$

$V'(r)$ 를 구하면

$$V'(r) = -6\pi(3r^2 - 6r) = -18\pi r(r - 2)$$

$$V'(r) = 0 \text{을 풀면 } r = 2 (\because 0 < r < 3)$$



원

구간 $(0, 3)$ 에서 함수 $V(r)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

r	0	...	2	...	3
$V'(r)$		+	0	-	
$V(r)$		↗	극대	↘	

$V(r)$ 는 $r = 2$ 일 때 극대이면서 최대이므로, 원기둥의 부피가 최대가 되는 반지름의 길이는 2이다.

유제 16. 정답 1 : 2

원기둥 밑면과 윗면의 넓이의 합은 $2\pi r^2$

원기둥 옆면의 넓이는 $2\pi rh$

원기둥의 겉넓이가 $96\pi \text{cm}^2$ 이므로

$$2\pi r^2 + 2\pi rh = 96\pi$$

$$r^2 + rh = 48 \quad \therefore h = \frac{48 - r^2}{r}$$

$$r > 0, h = \frac{48 - r^2}{r} > 0 \text{이므로 } r > 0, -4\sqrt{3} < r < 4\sqrt{3}$$

$$\therefore 0 < r < 4\sqrt{3}$$

원기둥의 부피를 $V(r)$ 라 하면

$$V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot \frac{48 - r^2}{r} = \pi(48r - r^3)$$

$V'(r)$ 를 구하면

$$V'(r) = \pi(48 - 3r^2) = 3\pi(4 + r)(4 - r)$$

$V'(r) = 0$ 을 풀면

$$r = 4 (\because 0 < r < 4\sqrt{3})$$

$0 < r < 4\sqrt{3}$ 에서 함수 $V(r)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

r	0	...	2	...	$4\sqrt{3}$
$V'(r)$		+	0	-	
$V(r)$		↗	극대	↘	

함수 $V(r)$ 는 $r = 4$ 일 때 극대이면서 최대가 된다.

$$r = 4 \text{일 때 } h = \frac{48 - 16}{4} = 8$$

$$\therefore r : h = 4 : 8 = 1 : 2$$

유제 17. 정답 ④

가방을 50만 원에 수입하여 65만 원에 팔고 있으므로 한 개에 대한 이익금은 15만원이다. x 만 원 인상할 경우 가방 한 개에 대한 이익금은 $(15 + x)$ 만 원이 되고, 이 때 하루 판매량은 600 개에서 $(600 - x^2)$ 개로 감소한다.

$$x > 0, 600 - x^2 > 0 \text{이므로 } 0 < x < \sqrt{600}$$

이익금을 $f(x)$ 라 하면

$$f(x) = (15 + x)(600 - x^2)$$

$f'(x)$ 를 구하면

$$f'(x) = 600 - x^2 + (15 + x)(-2x) = -3x^2 - 30x + 600 \\ = -3(x - 10)(x + 20)$$

$$f'(x) = 0 \text{을 풀면 } x = 10 (\because 0 < x < \sqrt{600})$$

구간 $(0, \sqrt{600})$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

x	0	...	10	...	$10\sqrt{6}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	극대	↘	

함수 $f(x)$ 는 $x=10$ 일 때 극대이면서 최대이므로 가방 한 개의 가격이 $65+10=75$ (만원)일 때 하루의 이익금이 최대가 된다.

유제 18. 정답: ②

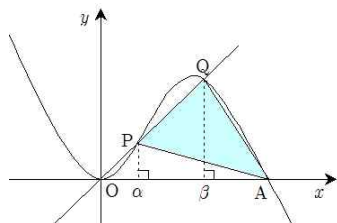
$h(x) = f(x) - g(x)$ 라 두면

$h(x)$ 는 미분가능(연속)이고, $h(a) = h(b) = 0$ 이고, $a < c < b$ 인 $x=c$ 에서 두 함수값의 차가 최대이므로 $h(x)$ 는 $a < c < b$ 인 $x=c$ 에서 최대 또는 최소이므로 $h'(c) = 0$ 이다.

$\therefore h'(c) = f'(c) - g'(c) = 0$ 에서 $f'(c) = g'(c)$ 이다.

유제 19. 정답 15

원점 O 를 통과하는 직선을 $y = mx$ (단, $m > 0$)이라 놓으면



$x^2(3-x) = mx$ 에서 $x(x^2 - 3x + m) = 0$ 이다.

여기에서 $x \neq 0$ 이므로 $x^2 - 3x + m = 0$ 이다.

$x^2 - 3x + m = 0$ 의 서로 다른 두 양의 근을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면

$$D = 9 - 4m > 0 \text{ 이므로 } 0 < m < \frac{9}{4}$$

$\triangle APQ$ 의 넓이를 S 라 하면

$$S = \triangle OAQ - \triangle OAP = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot m\beta - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot m\alpha = \frac{3m}{2}(\beta - \alpha)$$

$$\beta - \alpha = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{9 - 4m}$$

$$\therefore S = \frac{3}{2} \sqrt{-4m^3 + 9m^2}$$

여기에서 $f(m) = -4m^3 + 9m^2$ 이라 하면,

$0 < m < \frac{9}{4}$ 에서 $f(m) = -4m^3 + 9m^2$ 의 최댓값을 구해보자.

$$f'(m) = -6m(2m - 3) \text{ 이므로}$$

넓이 S 는 $m = \frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ 을 갖는다

$$\text{따라서 } 10m = 10 \times \frac{3}{2} = 15$$

유제 20. 정답 ②

예금 총액을 P 원이라 하면 대출 이자는 $\frac{12}{100}P$ 원이고, 가입자에게 지

불할 이자는 $\frac{a}{100}P$ 원이다.

예대마진을 $f(a)$ 라 하면

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{12}{100}P - \frac{a}{100}P = \frac{12k}{100}a^2 - \frac{k}{100}a^3 \\ &= \frac{k}{100}(12a^2 - a^3) \quad (a > 0) \end{aligned}$$

$f'(a)$ 를 구하면

$$f'(a) = \frac{k}{100}(24a - 3a^2) = \frac{3k}{100} \cdot a(8 - a)$$

$f'(a) = 0$ 을 풀면 $a = 8 (\because a > 0)$

$a > 0$ 에서 함수 $f(a)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

a	0	...	8	...
$f'(a)$		+	0	-
$f(a)$		↗	극대	↘

함수 $f(a)$ 는 $a=8$ 일 때 극대이면서 최대이므로 이율이 8%일 때 예대마진은 최대가 된다.

연 습 문 제

1. 정답 ⑤

모든 실수 x 에 대하여 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 를 만족하는 함수는 증가함수이다.

① $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

이 때, $f(x)$ 가 증가함수하려면 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 이를 만족하는 x 의 값의 범위는

$$3(x-1)(x-3) \geq 0$$

$$\therefore x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 3$$

따라서 $f(x)$ 는 $x \leq 1$ 또는 $x \geq 3$ 에서 증가한다.

② $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 6x + 9$ 에서

$$f'(x) = -6x^2 + 12x - 6 = -6(x-1)^2$$

따라서 $f'(x) \leq 0$ 이므로 $f(x)$ 는 감소함수이다.

③ $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ 에서

$$f'(x) = 4x^3 - 6x - 4x\left(x^2 - \frac{3}{2}\right)$$

$$= 4x\left(x + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

이 때, $f(x)$ 가 증가함수하려면 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 이를 만족하는 x 의 값의 범위는

$$4x\left(x + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \geq 0$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{6}}{2} \leq x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq \frac{\sqrt{6}}{2}$$

따라서 $f(x)$ 는 $-\frac{\sqrt{6}}{2} \leq x \leq 0$ 또는 $x \geq \frac{\sqrt{6}}{2}$ 에서 증가한다.

④ $f(x) = -3x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 2$ 에서

$$f'(x) = -12x^3 + 24x^2 - 12x$$

$$= -12x(x^2 - 2x + 1)$$

$$= -12x(x-1)^2$$

이 때, $f(x)$ 가 증가함수하려면 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 이를 만족하는 x 의 값의 범위는

$$-12x(x-1)^2 \geq 0 \quad \therefore x \leq 0$$

따라서 $f(x)$ 는 $x \leq 0$ 에서 증가한다.

$$\textcircled{5} \quad f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

따라서 $f'(x) > 0$ 이므로 $f(x)$ 는 증가함수이다.

따라서 모든 실수에서 증가하는 함수는 $\textcircled{5}$ 이다.

2. 정답. $\textcircled{3}$

' $f(a) = f(b)$ 이면 $a = b$ 이다.'의 대우는

' $a \neq b$ 이면 $f(a) \neq f(b)$ 이다.'

이므로 임의의 실수 a, b 에 대하여 $f(a) = f(b)$ 이면 $a = b$ 를 만족하는 함수 $f(x)$ 는 일대일 대응이다.

이 때, 일대일 대응이면 증가함수 또는 감소함수이고, $f(x)$ 의 x^3 의 계수가 양수이므로 $f(x)$ 는 증가함수이다.

즉, $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + kx + 3$ 에서

$$f'(x) = 6x^2 + 6x + k$$

실수 전체의 구간에서 함수 $f(x)$ 가 증가하므로 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x) = 6x^2 + 6x + k \geq 0$$

따라서 이차방정식 $6x^2 + 6x + k = 0$ 의 판별식 $D \leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 9 - 6k \leq 0 \quad \therefore k \geq \frac{3}{2}$$

3. 정답. $\left(1, \frac{5}{4}\right)$

$$f(x) = \frac{3}{4}x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^3 - 9x^2 + 6x$$

$$= 3x(x^2 - 3x + 2)$$

$$= 3x(x-1)(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 2$

따라서, 극점의 좌표는 다음과 같다.

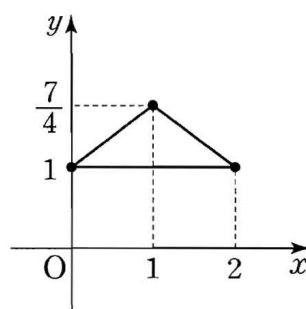
$$(0, f(0)) = (0, 1)$$

$$\left(1, f(1)\right) = \left(1, \frac{7}{4}\right)$$

$$(2, f(2)) = (2, 1)$$

따라서, 삼각형의 무게중심은

$$\left(\frac{0+1+2}{3}, \frac{1+\frac{7}{4}+1}{3}\right) \text{이므로 } \left(1, \frac{5}{4}\right)$$



4. 정답. $\textcircled{1}$

$$f(x) = x^3 - 12x + 2 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

오른쪽 표에 의하여 함수 $f(x)$ 는

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	18	$\searrow$	-14	$\nearrow$

$x = -2$ 에서 극대이고, $x = 2$ 에서 극소이므로

$f(x)$ 의 극대점은 A(-2, 18), 극소점은 B(2, -14)이다.

따라서, 직선 AB는 $y - 18 = \frac{-14 - 18}{2 - (-2)}(x + 2)$ 이므로

$$y = -8x + 2$$

따라서, 직선 AB의 y 절편은 2이다.

5. 정답. $\textcircled{3}$

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$x = 1, x = 3$ 에서 $f(x)$ 가 극값을 가지므로

$x = 1, x = 3$ 은 $f'(x) = 0$ 의 두 근이다.

$$\therefore f'(1) = 3 + 2a + b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f'(3) = 27 + 6a + b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = -6, b = 9$

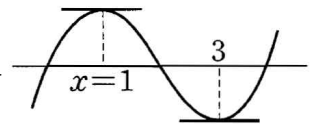
$$\therefore f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + c$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9x$$

$$= 3(x-3)(x-1)$$

이 때, 그래프의 개형을 그리면 $x = 3$ 에서 극솟값 -6 을 가지므로

$$f(3) = 27 - 54 + 27 + c = -6 \text{에서 } c = -6$$



6. 정답. $\textcircled{3}$

$f'(x) = 3x^2 - 6ax + 9 = 0$ 의 두 근을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면

$\alpha + \beta = 2a, \alpha\beta = 3$ 이고 $x = \alpha$ 일 때 극대, $y = \beta$ 일 때 극소이다.

(극댓값) + (극솟값) = 0이므로

$$f(\alpha) + f(\beta) = 0$$

$$\therefore (\alpha^3 - 3a\alpha^2 + 9\alpha + 27) + (\beta^3 - 3a\beta^2 + 9\beta + 27)$$

$$= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) - 3a\{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\} + 9(\alpha + \beta) + 54$$

$$= (2a)^3 - 3 \cdot 3 \cdot 2a - 3a\{(2a)^2 - 2 \cdot 3\} + 9 \cdot 2a + 54$$

$$= 2a^3 - 9a - 27 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 을 인수분해하면 $(a-3)(2a^2 + 6a + 9) = 0$ 이므로 실수 a 의 값은 3이다.

7. 정답. $\textcircled{3}$

$y = f'(x)$ 의 그래프로부터 $f(x)$ 의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

즉, $x = 0$ 에서 극소, $x = 2$ 에서 극대이

므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$\textcircled{1} \quad f(x)$ 는 구간 $(-1, 0)$ 에서 $f'(x) < 0$

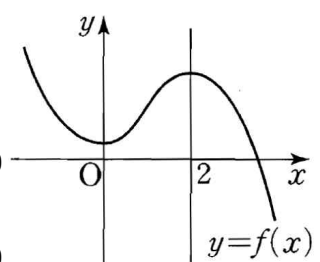
이므로 감소한다. $\therefore$ 거짓.

$\textcircled{2} \quad f(x)$ 는 구간 $(1, 2)$ 에서 $f'(x) > 0$

이므로 증가한다. $\therefore$ 거짓.

$\textcircled{3} \quad f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극소이다. $\therefore$ 참

$\textcircled{4} \quad f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 증가상태에 있으므로 극대도 아니고 극소도 아니



다. $\therefore$ 거짓.

⑤ $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극대이다. $\therefore$ 거짓.

따라서, 옳은 것은 ③이다.

8. 정답. ③

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + \frac{1}{2} \text{에서}$$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0$ 의 두 근이 $-2, 1$ 이므로
근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{2a}{3} = -1, \quad \frac{b}{3} = -2$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}, \quad b = -6$$

$$\therefore f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{1}{2}$$

주어진 $y = f'(x)$ 의 그래프는 $x=1$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 변하므로 $y = f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이다.

$$\therefore f(1) = 1 + \frac{3}{2} - 6 + \frac{1}{2} = -3$$

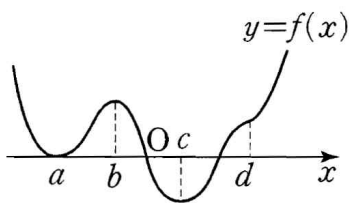
9. 정답. 2개

그림에서 $f'(x) = 0$ 인 점은 $x = a, b, 0, c, d$ 의 5개다.

$x=0$ 과 $x=d$ 일 때는 각각 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 극값을 갖지 않는다.

구간 $(-\infty, a)$ 에서 감소, 구간 (a, b) 에서 증가, 구간 $(b, 0), (0, c)$ 에서는 감소, 구간 (c, d) 에서 증가, 구간 (d, ∞) 에서 증가한다. 그러므로

$y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 극소점은 2개이다.



10. 정답. ②

풀이. 오른쪽 그림과 같이 함수

$y = f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만

나는 점의 x 좌표를 왼쪽부터 차례로 o, p, q, r 이라 하면 $x=p$

의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양

에서 음으로 바뀌므로 함수

$f(x)$ 는 $x=p$ 에서 극대값을 가지고, $x=o, x=q$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의

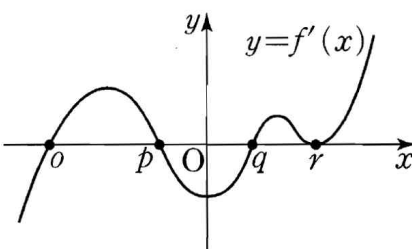
부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=o, x=q$ 에서 극솟값

을 가진다.

또, $x=r$ 의 좌우에서는 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 극값을 갖지

않는다.

따라서, 함수 $y = f(x)$ 의 극소점의 개수는 2개이다.



11. 정답. ①

$$f(x) = x^3 - (a-1)x^2 - \frac{4}{3}ax + \frac{2}{3}a \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2(a-1)x - \frac{4}{3}a$$

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 방정식

$f'(x) = 0$ 이 중근 또는 서로 다른 두 허근을 가져야 하므로

$$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - 3\left(-\frac{4}{3}a\right)$$

$$= (a+1)^2 \leq 0$$

$$\therefore a = -1$$

12. 정답. ①

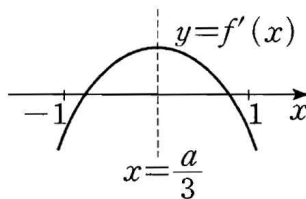
함수 $f(x)$ 가 폐구간 $[-1, 1]$ 에서 극댓값

과 극솟값을 모두 가지므로 방정식

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax - a = 0 \text{은}$$

$-1 < x < 1$ 에서 서로 다른 두 실근을 가

진다.



$$(i) \text{ 판별식 : } \frac{D}{4} = a^2 - 3a = a(a-3) > 0$$

$$\therefore a < 0 \text{ 또는 } a > 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$(ii) \text{ 대칭축 : } x = \frac{a}{3} \text{가 개구간 } (-1, 1) \text{ 안에 있으므로}$$

$$-1 < \frac{a}{3} < 1 \quad \therefore -3 < a < 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$(iii) f'(-1) = -3 - 3a \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq a \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

따라서, ㉠, ㉡, ㉢에서 $-1 \leq a < 0$

13. 정답. ③

$$f(x) = x^3 + ax^2 + ax + a \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + a$$

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3a > 0$$

$$\therefore a < 0 \text{ 또는 } a > 3$$

14. 정답 $9 < a < 12$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + ax + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + a$$

함수 $f(x)$ 가 $-2 < x < 3$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면

방정식 $f'(x) = 0$ 의 서로 다른 두 실근이

$-2 < x < 3$ 에 있어야 하므로

$$(i) f'(x) = 0 \text{의 판별식 } D > 0$$

$$(ii) f'(-2) > 0$$

$$(iii) f'(3) > 0$$

$$(iv) -2 < (y = f'(x) \text{의 대칭축}) < 3$$

$$(i) 3x^2 - 12x + a = 0 \text{의 판별식}$$

$$D > 0 \text{이므로}$$

$$\frac{D}{4} = (-6)^2 - 3a > 0$$

$$3a < 36 \quad \therefore a < 12$$

$$(ii) f'(-2) > 0 \text{에서}$$

$$f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) + a > 0$$

$$12 + 24 + a > 0 \quad \therefore a > -36$$

(iii) $f'(3) > 0$ 에서

$$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + a > 0$$

$$-9 + a > 0 \quad \therefore a > 9$$

(iv) $y = f'(x)$ 의 대칭축의 방정식은 $x = 2$ 이므로

$$-2 < 2 < 3 \quad \therefore \text{성립}$$

(i), (ii), (iii), (iv)에서 a 의 값의 범위는 $9 < a < 12$

15. 정답. ①

풀이. ㄱ. $x = a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 변하므로 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극소이다.

ㄴ. $x = b$ 일 때, $f'(x) > 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x = b$ 에서 극값을 갖지 않는다.

ㄷ. $x = c$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 변하지 않으므로 $f(x)$ 는 $x = c$ 에서 극값을 갖지 않는다.

16. 정답 15

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 6$$

(가) $f(-x) = f(x)$ 이므로

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 6 = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 6 \text{에서}$$

$$a = 0, \quad c = 0$$

(나) $f'(x) = 4x^3 + 2bx = 2x(2x^2 + b) = 0$ 에서

$$x^2 = -\frac{b}{2}, \quad x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2}} \quad (b < 0) \text{일 때, 극소값 } -10 \text{을 갖는다.}$$

$$f\left(\pm \sqrt{-\frac{b}{2}}\right) = \frac{b^2}{4} + b\left(-\frac{b}{2}\right) + 6 = -10$$

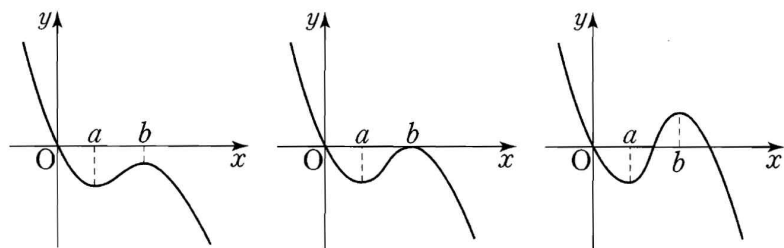
$$\therefore -\frac{b^2}{4} = -16 \text{에서 } b^2 = 64$$

$$b < 0 \text{이므로 } b = -8$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^4 - 8x^2 + 6 \text{에서 } f(3) = 81 - 72 + 6 = 15$$

17. 정답. ⑤

풀이. 원점을 지나고 $x = a$ 에서 극소이고, $x = b$ 에서 극대인 삼차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



ㄱ. $f(a)$ 의 값은 항상 음수이다.

$$\therefore f(a) < 0 \quad \therefore \text{참}$$

ㄴ. $f(b)$ 의 값은 음수일 수도 있고 양수일 수도 있으며 0일 수도 있다.

$$\therefore \text{거짓}$$

ㄷ. 극대점과 극소점을 잇는 선분의 기울기는 항상 양수이므로

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0 \quad \therefore \text{참}$$

ㄹ. $f'(a) = 0$ 이다. $\therefore$ 참

18. 정답. ④

풀이. 그림에서 $y = f'(x)$ 의 그래프가 $x = 1, 2, 3, 4$ 에서 $f'(x) = 0$ 이고 모두 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌므로 그 지점에서 모두 극값을 갖는다.

$y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

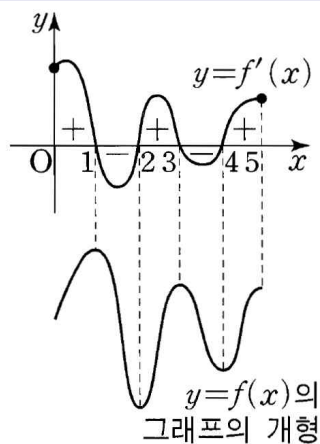
① $f(x)$ 는 $x = 1, x = 3$ 일 때 극대이므로 극대값이 2개다.

② 연속이므로 반드시 최댓값을 갖는다.

③ $f(0), f(2), f(4)$ 중에 최솟값이 있다.

④ $f(3) > 0$ 일 때, $f(4)$ 의 부호를 알 수 없다.

⑤ $0 < x < 1$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다. 즉, $f(0) < f(1)$ 이므로 $f(0) > 0$ 이면 $f(1) > 0$ 이다.



19. 정답: 16

$f(x - y) = f(x) - f(y) + xy(x - y)$ 에 $x = 0, y = 0$ 을 대입하면 $f(0) = f(0) - f(0)$

$$\therefore f(0) = 0 \cdots \text{㉠}$$

$f'(0) = 8$ 이므로

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \quad (\because \text{㉠}) = 8 \cdots \text{㉡}$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-h) + x \cdot (-h)(x+h) - f(x)}{h} \quad (\because \text{㉡})$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(-h)}{-h} - x^2 - xh \right\} = 8 - x^2 \quad (\because \text{㉡})$$

$$= (2\sqrt{2} + x)(2\sqrt{2} - x)$$

함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 극댓값을 갖고 $x = b$ 에서 극솟값을 가지므로 $a = 2\sqrt{2}, b = -2\sqrt{2}$

$$\therefore a^2 + b^2 = 8 + 8 = 16$$

20. 정답 32

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d 는 정수)에서 기함수 조건($\because$ 가) 때문에 $b = d = 0$

따라서 $f(x) = ax^3 + cx$ 이다.

$$(\text{나}) \text{에서 } f(1) = a + c = 5 \quad \text{㉠}$$

또한 (다)에서 $1 < 3a + c < 7$

$$\text{㉠에서 } c = 5 - a \text{로 두면 } 1 < 3a + 5 - a < 7$$

$$-2 < a < 1$$

$$\therefore \text{정수 } a \text{는 } -1 \text{과 } 0 \text{인데 삼차함수이므로 } a = -1$$

또한, $c = 6$

$$\therefore f(x) = -x^3 + 6x$$

$$\text{미분하면 } f'(x) = -3x^2 + 6 = 0$$

$x = \sqrt{2}$ 에서 극댓값을 가지므로

$$m^2 = \{f(\sqrt{2})\}^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32$$

21. 정답 64

원점을 지나고 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$ 에 대해 $f(2+x) = f(2-x)$ 이므로 $x=2$ 에 대하여 대칭이고, $x=1$ 에서 극소이므로 $x=3$ 에서 극소이고, $x=2$ 에서 극대이다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c \\ &= 4(x-1)(x-2)(x-3) \\ &= 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 \end{aligned}$$

따라서 $a=-8, b=22, c=-24$

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x$$

$x=2$ 에서 극대이고 극댓값 $a=f(2)=-8$

$$\therefore a^2 = 64$$

22. 정답 ④

$$h(x) = f(x) - g(x) \text{에서 } h'(x) = f'(x) - g'(x)$$

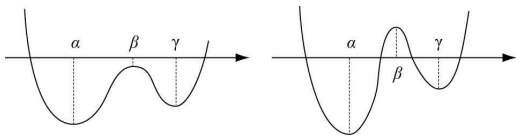
$h'(x)=0$ 의 세 실근이 α, β, γ 이므로

$$h'(\alpha) = h'(\beta) = h'(\gamma) = 0$$

$x=\alpha, \gamma$ 에서 극솟값, $x=\beta$ 에서 극댓값

최소값이 음수를 만족하는 그래프의 개형으로

다음과 같은 경우를 생각하면



ㄱ. (거짓)

$$\text{ㄴ. } \frac{h(\gamma) - h(\beta)}{\gamma - \beta} < \frac{h(\beta) - h(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad (\text{참})$$

ㄷ. (참)

23. 정답 16

$$\text{i) } f'(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$\therefore x=3$ 에서 극솟값을 가진다.

$$f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3^2 - 3 \cdot 3 = -9$$

$$\therefore a=3, b=-9$$

ii) 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선은 $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$

$$y = -3x - \frac{4}{3}$$

$9x + 3y + 4 = 0$ 과 점 $(3, -9)$ 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|27 - 27 + 4|}{\sqrt{9^2 + 3^2}} = \frac{4}{\sqrt{90}}$$

$$\therefore 90d^2 = 90 \times \frac{16}{90} = 16$$

24. 정답: ④

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{a}f(-ax-ah) + \frac{1}{a}f(-ax)}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-ax-ah) - f(-ax)}{-ah}$$

$$= f'(-ax)$$

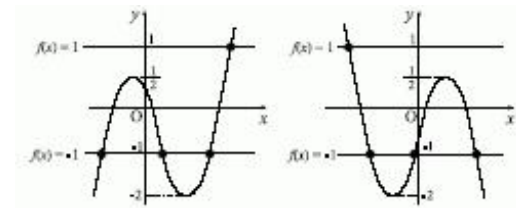
25. 정답: ④

$$\text{(i) } |f(x)| < 1 \text{ 일 때 } g(x) = 1$$

$$\text{(ii) } |f(x)| = 1 \text{ 일 때 } g(x) = \frac{1}{2}$$

$$\text{(iii) } |f(x)| > 1 \text{ 일 때 } g(x) = 0$$

따라서 함수 $y = g(x)$ 는 $f(x) = 1$ 또는 $f(x) = -1$ 일 때 불연속이다. 그림과 같이 $f(x) = 1$ 인 x 는 1개, $f(x) = -1$ 인 x 는 3개이므로 실수전체의 집합에서 불연속인 x 는 4개다.



26. 정답 ①

삼차함수의 극댓값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$f(x) = ax^3 + bx \text{로 놓으면}$$

$$f'(x) = 3ax^2 + b = 3a\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \therefore b = -\frac{3a}{4}$$

$$f(x) = ax^3 - \frac{3a}{4}x = ax\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{이므로}$$

$$\triangle ACB = \frac{1}{2} \square ADBC = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times (\text{극댓값}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{이다.}$$

따라서 극댓값은 1이다.

27. 정답 ⑤

$y = f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는

$$x = \alpha \text{ 또는 } x = \beta$$

$f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

x	...	α	...	β	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↗		↗	극대	↘

따라서 보기 중 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ⑤이다.

28. 정답 ①

$\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = 10, \overline{AC} = 8$ (극값의 차)이므로 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{BC} = 6$

외심은 빗변의 중점이므로 $\overline{BC}$ 중점의 x 값은 6

그러므로 점 A, B의 x 값이 각각 3, 9

$x=3$ 에서 극댓값, $x=9$ 에서 극솟값이므로

$$f'(3) = f'(9) = 0$$

$\therefore$ 두 근의 곱은 27

29. 정답 ③

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (3x-1)(x+1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = \frac{1}{3}$$

구간 $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

x	-2	...	-1	...	$\frac{1}{3}$	...	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+	+
$f(x)$	-1	↗	2	↘	$\frac{22}{27}$	↗	$\frac{7}{8}$

$f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극대, $x = \frac{1}{3}$ 에서 극소이므로

$$\text{극댓값 : } f(-1) = 2$$

$$\text{극솟값 : } f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{22}{27}$$

주어진 구간의 양 끝점에서의 함수값은

$$f(-2) = -1, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 2, 최솟값은 $-\frac{1}{8}$ 이므로 최댓값과 최솟값의 합은 1이다.

30. 정답 24

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2) = 0 \text{에서 } x = -2, 0$$

$f(-1) = 12, f(0) = 10, f(1) = 14$ 이므로 최댓값과 최솟값의 합은 $14 + 10 = 24$ 이다.

31. 정답 ③

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

함수 $f(x)$ 는 $x = 3$ 에서 극솟값을 가지므로

$$f'(3) = 27 + 6a + b = 0 \quad \text{..... ㉠}$$

$$f(3) = 27 + 9a + 3b + 1 = 1 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -6, b = 9$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f'(x) = 3(x-1)(x-3) = 0 \text{에서 } x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

x	-1	...	1	...	3
$f'(x)$		+	0	-	0
$f(x)$	-15	↗	5	↘	1

표에 의하여 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 일 때 최댓값 5를 갖는다.

32. 정답 ④

$$f(x) = ax^3 - 6ax^2 + b \text{에서}$$

$$f'(x) = 3ax^2 - 12ax = 3ax(x-4)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = 4$$

x	-1	...	0	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-7a+b$	↗	b	↘	$-16a+b$

위의 표에 의하여 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 일 때 최댓값 b , $x = 2$ 일 때 최솟값 $-16a + b$ 를 가진다.

따라서 $b = 3, -16a + b = -13$ 이므로

$$a = 1, b = 3$$

$$\therefore a + b = 1 + 3 = 4$$

33. 정답 ③

오른쪽 그림과 같이 점 P의 좌표를 $(t, -t^2 + 3)$ ($0 < t \leq \sqrt{3}$)으로 놓으면

점 Q의 좌표는 $(-t, -t^2 + 3)$ 이므로 $\overline{PQ} = 2t$

따라서, $\triangle OPQ$ 의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \frac{1}{2} \cdot 2t(-t^2 + 3) = -t^3 + 3t$$

$$\therefore S'(t) = -3t^2 + 3 = -3(t+1)(t-1)$$

$$S'(t) = 0 \text{에서 } t = -1 \text{ 또는 } t = 1$$

오른쪽 표에 의하여

t	0	...	1	...	$\sqrt{3}$
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		↗	극대	↘	

$0 < t \leq \sqrt{3}$ 에서 $S(t)$ 는

$t = 1$ 일 때 극대이면서 최대이므로 $\triangle OPQ$ 의 넓이의 최댓값은

$$S(1) = (-1)^3 + 3 \times 1 = 2$$

34. 정답 $\frac{4}{9}\sqrt{3}$

오른쪽 그림과 같이 점 P의 좌표를 $(t, 1-t^2)$ 으로 놓으면

점 Q의 좌표는 $(-t, 1-t^2)$ 이므로 가로의 길이는 $2t$, 세로의 길이는 $1-t^2$ 이다.

따라서, 직사각형 넓이 $S(t)$ 는

$$S(t) = 2t(1-t^2)$$

$$= -2t^3 + 2t \text{ (단, } 0 < t < 1)$$

$$\therefore S'(t) = -6t^2 + 2 = -6\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$f'(t) = 0 \text{에서 } t = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

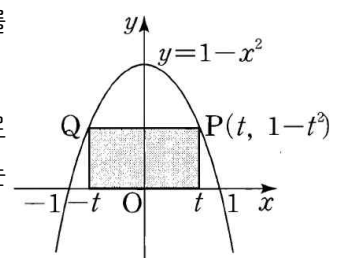
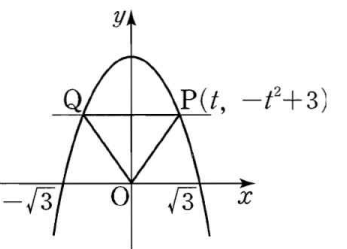
$$\text{또는 } t = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

오른쪽 표에 의하여

$0 < t < 1$ 에서 $S(t)$ 는

$t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 일 때 극대이면서 최대이다.

따라서, 직사각형의 넓이 $S(t)$ 의 최댓값은



$$S\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left\{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right\} = \frac{4}{9}\sqrt{3}$$

35. 정답 ④

대각선 AC의 길이를 l 이라 하면 $l^2 = h^2 + 4r^2$ 이므로 원기둥의 부피 V 는

$$V = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{l^2 - h^2}{4}\right) \cdot h = \frac{\pi}{4}(l^2 h - h^3) \text{ 에서}$$

$$\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{4}(l^2 - 3h^2) = \frac{\pi}{4}(l + \sqrt{3}h)(l - \sqrt{3}h) = 0 \text{ 에서}$$

$$h = -\frac{1}{\sqrt{3}}l \text{ 또는 } h = \frac{1}{\sqrt{3}}l$$

따라서, 부피 V 는 $h > 0$ 에서 $h = \frac{\sqrt{3}}{3}l$ 일 때, 극대이면서 최대이다.

$$\text{이 때, } r^2 = \frac{1}{4}(l^2 - h^2) = \frac{1}{4}\left\{l^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}l\right)^2\right\} = \frac{1}{6}l^2 \text{ 에서}$$

$$r = \frac{\sqrt{6}}{6}l (\because r > 0)$$

$$\therefore r : h = \frac{\sqrt{6}}{6}l : \frac{\sqrt{3}}{3}l = \sqrt{6} : 2\sqrt{3} = \sqrt{2} : 2$$

36. 정답 ③

잘라낸 정사각형의 한 변의 길이를 x cm (단, $0 < x < \frac{9}{2}$)라 하고

만든 상자의 부피를 $V(\text{cm}^3)$ 라고 하면

$$V = x(9 - 2x)^2 \text{ 에서}$$

$$V' = (9 - 2x)^2 + x \cdot 2(9 - 2x)(-2) = 3(2x - 3)(2x - 9)$$

$$V' = 0 \text{ 에서 } x = \frac{3}{2} \text{ 또는 } x = \frac{9}{2}$$

x	0	...	$\frac{3}{2}$	...	$\frac{9}{2}$
V'		+	0	-	
V	0	↗	54	↘	0

위의 표에 의하여 $0 < x < \frac{9}{2}$ 에서 $V(x)$ 는

$x = \frac{3}{2}$ 일 때 극대이면서 최대이다.

$$\text{따라서, 부피의 최댓값은 } V\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}(9 - 3)^2 = 54(\text{cm}^3)$$

37. 정답 ③

직원뿔의 높이를 h ($0 < h < 120$), 밑면의 반지름을 r 이라고 하면

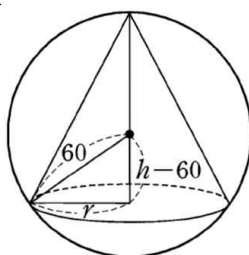
$$r^2 + (h - 60)^2 = 60^2, \text{ 즉 } r^2 = 120h - h^2 \text{ 부}$$

피 V 는

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(120h - h^2)h$$

$$= \frac{1}{3}\pi(120h^2 - h^3)$$

$$V' = \frac{1}{3}\pi(240h - 3h^2) = \pi h(80 - h)$$



h	0	...	80	...	120
V'		+	0	-	
V	0	↗	극대	↘	0

따라서, 위의 표에 의하여 $0 < h < 120$ 에서 $v(h)$ 는 $h = 80(\text{cm})$ 일 때 극대이면서 최대이다.

38. 정답 $\sqrt{6}$ cm

정사각형의 한 변의 길이를 x , 높이를 y , 면체의 부피를 V , 겉넓이를 S 라 하면

$$V = x^2 y \quad \dots\dots ㉠$$

$$S = 2x^2 + 4xy = 36$$

$$\therefore xy = -\frac{1}{2}x^2 + 9 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠에 대입하면

$$V = x\left(-\frac{1}{2}x^2 + 9\right) = -\frac{1}{2}x^3 + 9x \text{ 이므로}$$

$$V' = -\frac{3}{2}x^2 + 9 = -\frac{3}{2}(x^2 - 6)$$

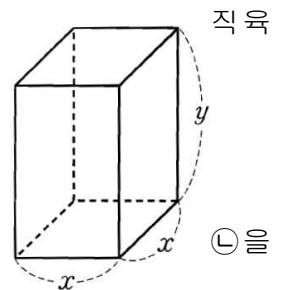
$$= -\frac{3}{2}(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})$$

$$V' = 0 \text{ 에서 } x = -\sqrt{6} \text{ 또는 }$$

$$x = \sqrt{6}$$

왼쪽 증감표에 의하여 $x > 0$

서 $x = \sqrt{6}$ 일 때, 극대이면서 최대이다. 따라서, 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{6}$ cm이다.



39. 정답 ⑤

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x-a} = 1 \text{ 에서 } x \rightarrow a \text{ 일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{ 이므로}$$

(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Rightarrow f(a) = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a) = 1 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - 1}{x-b} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x-b} = f'(b) = 2 \quad \dots\dots ㉢$$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 ㉠, ㉢에 의해 두 점 $(a, 0)$, $(b, 1)$ 을 지나고 ㉡, ㉢에 의해 $f'(a) > 0$, $f'(b) > 0$ 이므로

$x = a$, $x = b$ 에서 증가상태에 있어야 한다.

보기 중 이를 만족하는 그래프는 ⑤이므로 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ⑤이다.