

유형 01

등차수열의 공차 구하기

1. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 -2 일 때, 등차수열 $\{2-3a_n\}$ 의 공차를 구하여라.

2. 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공차가 각각 -2 , 3 일 때, 등차수열 $\{3a_n+5b_n\}$ 의 공차는?

- ① 4 ② 6 ③ 8
④ 9 ⑤ 15

3. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 등차수열 $\{a_{2n}\}$ 의 공차가 8 일 때, 등차수열 $\{a_{3n+1}\}$ 의 공차를 구하여라.

4. 공차가 3 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면?

— <보 기> —

- ㄱ. 수열 $\{3a_n\}$ 은 공차가 9 인 등차수열이다.
 ㄴ. 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 공차가 6 인 등차수열이다.
 ㄷ. 수열 $\{2a_{2n}-a_{2n-1}\}$ 은 공차가 6 인 등차수열이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 02

등차수열의 제 k 항 구하기

5. 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_5 = 9$, $a_{12} = 23$ 일 때, a_{100} 의 값을 구하여라.

6. 등차수열 $\{a_n\}$ 이 $a_3 = 2$, $a_6 = 17$ 을 만족시킬 때, a_8 의 값을 구하시오.

7. 제3항이 8이고, 제10항이 29인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 200은 제 몇 항인가?

- ① 65 ② 66 ③ 67
④ 68 ⑤ 69

8. 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 제2항과 제7항은 절댓값이 같고 부호가 반대이며 제4항은 -2 일 때, 일반항 a_n 을 구하여라.

9. 첫째항이 5, 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

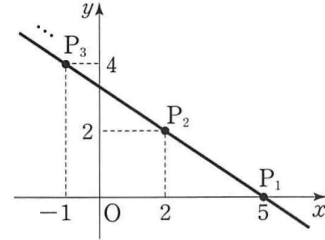
$$\frac{1}{a_2 a_4} + \frac{1}{a_4 a_6} + \frac{1}{a_6 a_8} + \cdots + \frac{1}{a_{16} a_{18}} \text{의 값은?}$$

- ① $\frac{1}{56}$ ② $\frac{1}{14}$ ③ $\frac{1}{8}$
④ $\frac{5}{28}$ ⑤ $\frac{3}{14}$

10. 다음 그림과 같이 한 직선 위에

$$\overline{P_n P_{n+1}} = \overline{P_{n+1} P_{n+2}} \quad (n \text{은 자연수})$$

를 만족하는 40개의 점 $P_1(5, 0)$, $P_2(2, 2)$, $P_3(-1, 4)$, $P_4(-4, 6)$, $\cdots$, $P_{40}(a, b)$ 가 있다. 이때, $a+b$ 의 값을 구하시오.



유형 03

조건을 만족시키는 항이 제 몇 항인지 구하기

11. 제 7항이 29, 제 10항이 20인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 처음으로 음수가 되는 항은?

- ① 제 15항 ② 제 16항 ③ 제 17항
④ 제 18항 ⑤ 제 19항

12. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 + a_2 + a_3 = -138, \quad a_4 + a_5 + a_6 = -102$$

일 때, $a_k = 22$ 를 만족시키는 k 의 값은?

- ① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

13. 공차가 4인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_{23} = 23$ 일 때, $|a_n|$ 의 값이 최소가 되는 자연수 n 의 값을 구하여라.

16. 4와 16 사이에 m 개, 16과 40 사이에 n 개의 수를 넣어서 등차수열

$$4, a_1, a_2, \dots, a_m, 16, b_1, b_2, \dots, b_n, 40$$

을 만들었다. 이때 m, n 사이의 관계식은?

- ① $n = 2m - 1$ ② $n = 2m + 1$ ③ $n = 2m + 3$
 ④ $n = 3m$ ⑤ $n = 3m + 1$

유형 04

두 수 사이에 수를 넣어 만든 등차수열

14. 1과 101 사이에 19개의 수 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{19}$ 를 넣어 1, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{19}, 101$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루도록 할 때, 이 수열의 공차를 구하여라.

17. 두 등차수열 x, a_1, a_2, a_3, y 와

$x, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, y$ 에서 $\frac{a_2 - a_1}{b_5 - b_4}$ 의 값을 구하시오.

(단, $x \neq y$)

15. -3과 15 사이에 n 개의 수를 넣어

$$-3, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, 15$$

가 이 순서대로 등차수열을 이루도록 하였다. 이 수열의

공차가 $\frac{3}{2}$ 일 때, n 의 값을 구하여라.

유형 05

등차중항

18. 세 수 $2a, a^2 + 2a, 4$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 모든 a 의 값의 합을 구하여라.

19. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 + a_5 = 36$ 이고 $a_2 a_4 = 180$ 일 때, $a_n < 100$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최댓값을 구하시오.

20. 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_2 + a_4 = 810$, $a_5 + a_7 = 30$ 일 때, a_{10} 의 값은?

- ① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1
④ 3 ⑤ 9

21. 0이 아닌 다섯 개의 수 a, b, c, d, e 가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 상수 k 에 대하여

$$\frac{b+d}{2} + \frac{a+e}{4} = kc \text{가 성립한다. 이때, } k \text{의 값은?}$$

- ① $\frac{2}{5}$ ② 1 ③ $\frac{7}{6}$
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

22. 오른쪽 그림에서 가로줄과 세로줄에 있는 세 수가 각각 등차수열을 이룬다. 예를 들어 $a, 6, e$ 는 이 순서대로 등차수열을 이루고, $e, 0, f$ 는 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 이때 $a+b-d-f$ 의 값을 구하여라.

a	b	14
6	c	d
e	0	f

23. 표의 빈 칸에 6개의 자연수를 한 칸에 하나씩 써넣어 가로, 세로, 대각선 방향으로 각각 등차수열을 이루도록 할 때, 빈 칸에 써넣을 6개의 수의 합을 구하시오.

3		7
	11	

유형 06

등차수열을 이루는 수

24. 삼차방정식 $x^3 - 15x^2 + kx - 105 = 0$ 의 세 근이 등차수열을 이룰 때, 상수 k 의 값은?

- ① 63 ② 69 ③ 71
④ 73 ⑤ 79

25. 삼차방정식 $x^3 - 6x^2 - 4x + k = 0$ 의 세 근이 작은 것부터 순서대로 등차수열을 이룰 때, 상수 k 의 값은?

- ① 21 ② 22 ③ 23
④ 24 ⑤ 25

26. 삼차방정식 $x^3 - 9x^2 + ax + b = 0$ 의 세 근을 $1, \alpha, \beta (1 < \alpha < \beta)$ 라 하자. 세 수 $1, \alpha, \beta$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $a - b$ 의 값을 구하시오.

27. 등차수열을 이루는 네 개의 수가 있다. 네 수의 합은 12이고 가장 작은 수와 가장 큰 수의 곱은 -135 일 때, 네 수 중 가장 큰 수를 구하여라.

28. 직각삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 가 공차가 d 인 등차수열을 이룬다고 한다. 이때, 이 직각삼각형의 넓이를 d 의 식으로 나타내면?

- ① $4d^2$ ② $6d^2$ ③ $8d^2$
④ $10d^2$ ⑤ $12d^2$

29. 다음 조건을 모두 만족시키는 직각삼각형의 빗변의 길이를 구하여라.

- (가) 직각삼각형의 세 변의 길이는 등차수열을 이룬다.
(나) 직각삼각형의 넓이는 150이다.

30. 공책 60권을 5명의 학생에게 나누어 주었다. 각 학생이 받은 공책의 수는 등차수열을 이루고, 가장 적게 받은 학생과 그 다음으로 적게 받은 학생의 공책의 수의 합은 나머지 세 학생이 받은 공책의 수의 합의 $\frac{1}{3}$ 이라 한다. 이때 가장 많이 받은 학생의 공책의 수는?

- ① 14 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 22

31. 다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 이 있다.

$$a_1 = 1, \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

a_{20} 의 값은?

- ① $\frac{2}{21}$ ② $\frac{4}{21}$ ③ $\frac{5}{21}$
 ④ $\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{3}{7}$

32. $\frac{1}{16}, \frac{1}{7}$ 사이에 두 개의 수 x, y 를 넣어 네 개의 수 $\frac{1}{16}, x, y, \frac{1}{7}$ 이 이 순서대로 조화수열을 이루도록 할 때, $x+y$ 의 값은?

- ① $\frac{3}{130}$ ② $\frac{11}{130}$ ③ $\frac{19}{130}$
 ④ $\frac{23}{130}$ ⑤ $\frac{27}{130}$

33. 수열 $\{a_n\}$ 이 $4, 2, \frac{4}{3}, 1, \frac{4}{5}, \dots$ 일 때, a_{10} 의 값은?

- ① $\frac{3}{10}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{7}{5}$
 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

34. 세 수 $a, 4, b$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 $a, 3, b$ 가 이 순서대로 조화수열을 이룰 때, ab 의 값은?

- ① 12 ② 15 ③ 18
 ④ 20 ⑤ 25

35. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 1, a_4 = 7$ 일 때, $a_2 + a_3$ 의 값은?

- ① 5 ② 6 ③ 7
 ④ 8 ⑤ 9

36. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 + a_4 + a_6 = 30$ 일 때, $a_1 + a_7$ 의 값을 구하시오.

37. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1$ 이고, 공차가 3인 등차수열일 때, $a_1 + a_3 + a_5$ 의 값을 구하시오.

38. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여
 $a_6 + a_{11} + a_{15} + a_{20} = 32$ 일 때,
 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{25}$ 의 합을 구하시오.

39. 서로 다른 n 개의 항으로 이루어진 등차수열
 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 이 다음 세 조건을 만족한다.

- (가) 처음 4개 항의 합은 26이다.
 (나) 마지막 4개 항의 합은 134이다.
 (다) $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 260$

이때, 자연수 n 의 값을 구하시오.

40. 첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을
 만족시킨다.

- (가) $a_2 + a_6 + a_{10} = 8$
 (나) $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 25$

이때, n 의 값을 구하시오.

41. 첫째항이 50, 제 n 항이 -10 이고 첫째항부터 제
 n 항까지의 합이 220인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차는?

- ① -6 ② -5 ③ -4
 ④ -3 ⑤ -2

42. 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 제 3항이 -4 이고,
 $a_5 : a_8 = 2 : 3$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제
 12항까지의 합을 구하여라.

43. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 50, a_{10} = 23$ 일 때,
 $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{30}|$ 의 값은?

- ① 196 ② 234 ③ 478
 ④ 576 ⑤ 689

44. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = -4$, $a_9 = 44$ 일 때,
 $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{15}|$ 의 값을 구하시오.

45. 첫째항이 60인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열
 $\{T_n\}$ 을

$$T_n = |a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n|$$

이라 하자. 수열 $\{T_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) T_{19} < T_{20} \quad (나) T_{20} = T_{21}$$

$T_n > T_{n+1}$ 을 만족시키는 n 의 최솟값과 최댓값의 합을
 구하시오.

유형 09

두 수 사이에 수를 넣어 만든 등차수열의 합

46. 4와 56사이에 n 개의 수 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 을 넣어
 등차수열 4, $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, 56$ 을 만들었다. 이
 수열의 모든 항의 합이 660일 때, n 의 값은?

- ① 18 ② 19 ③ 20
 ④ 21 ⑤ 22

47. 수열 $-6, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, 30$ 이 이 순서대로
 등차수열을 이루고 그 합이 120일 때, 자연수 n 의 값을
 구하시오.

48. -3 과 33 사이에 28개의 수 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{28}$ 을
 넣어 30개의 수가 첫째항이 -3 , 끝항이 33 인
 등차수열을 이루도록 할 때, $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{28}$ 의
 값을 구하여라.

49. 다음과 같이 10과 88사이에 n 개의 서로 다른 수를
 넣어 등차수열을 만들려고 한다. 만들 수 있는 등차수열
 중에서 1이 아닌 최소의 자연수를 공차로 갖는
 등차수열의 합은?

$$10, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, 88$$

- ① 1930 ② 1940 ③ 1950
 ④ 1960 ⑤ 1970

유형 10

두 개 이상의 등차수열의 합

50. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 첫째항의 합이 4이고
공차의 합이 2일 때,

$(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}) + (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{15})$ 의
값은?

- ① 120 ② 160 ③ 210
④ 270 ⑤ 330

51. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의
합을 각각 S_n , T_n 이라 할 때,

$a_{10} + b_{10} = 42$, $S_{10} + T_{10} = 160$ 이다. 이때 $a_1 + b_1$ 의
값을 구하여라.

유형 11

부분의 합이 주어진 등차수열

52. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 첫째항부터 제 10항까지의
합이 140, 첫째항부터 제 20항까지의 합이 480일 때,
첫째항부터 제 30항까지의 합은?

- ① 990 ② 1000 ③ 1010
④ 1020 ⑤ 1030

53. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을
 S_n 이라 할 때, $S_5 = 160$, $S_{15} = 630$ 이다. 이때
 $a_6 + a_7 + a_8 + \dots + a_{40}$ 의 값은?

- ① 2512 ② 2516 ③ 2520
④ 2524 ⑤ 2528

54. 첫째항부터 제 10항까지의 합이 100, 제 11항부터
제 20항까지의 합이 300인 등차수열의 제 21항부터 제
30항까지의 합을 구하여라.

유형 12

등차수열의 합의 최대·최소

55. 제 5항이 8, 제 13항이 -16 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서
첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, S_n 의
최댓값을 구하여라.

56. 제30 항이 116, 제50 항이 56인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서
첫째항부터 제 몇 항까지의 합이 최대가 되는가?

- ① 87 ② 83 ③ 75
④ 68 ⑤ 58

57. 첫째항이 -30 , 공차가 4인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서
첫째항부터 제 몇 항까지의 합이 최소가 되는가?

- ① 제 5항 ② 제 6항 ③ 제 7항
④ 제 8항 ⑤ 제 9항

58. 첫째항부터 제 4항까지의 합이 24이고, 첫째항부터
제 10항까지의 합이 0인 등차수열이 있다. 이 수열의
첫째항부터 제 p 항까지의 합이 최대이고, 그때의 수열의
합이 q 일 때, $p+q$ 의 값을 구하여라.

59. 첫째항이 -4 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제
 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $S_3 = S_8$ 이다. 이때 S_n 의
최솟값은?

- ① -11 ② $-\frac{111}{10}$ ③ $-\frac{56}{5}$
④ -12 ⑤ $-\frac{121}{10}$

60. 첫째항이 112, 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서
첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. S_8 의 값이
임의의 다른 S_n 의 값보다 클 때, 공차를 구하여라.

61. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $a_1 > 0$ 이고 $S_{14} = S_{28}$ 이다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $a_{15} + a_{16} + a_{17} + \dots + a_{28} = 0$

ㄴ. $|a_{19}| = |a_{24}|$

ㄷ. $n = 22$ 일 때, S_n 은 최댓값을 갖는다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 13 나머지가 같은 자연수의 합

62. 100이하의 자연수 중에서 3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수의 총합은?

- ① 958 ② 1275 ③ 1667
 ④ 1717 ⑤ 2585

63. 50보다 크고 100보다 작은 자연수 중에서 3또는 5로 나누어 떨어지는 수의 총합을 구하여라.

64. 두 등차수열
 $\{a_n\} : 1, 3, 5, 7, \dots, 99,$
 $\{b_n\} : 3, 6, 9, 12, \dots, 99$
 에 대하여 두 수열에 공통으로 들어 있는 수의 총합을 구하여라.

유형 14 등차수열의 합의 활용

65. 연속하는 20개의 자연수의 합이 530일 때, 20개의 자연수 중에서 가장 큰 수는?

- ① 30 ② 32 ③ 34
 ④ 36 ⑤ 38

66. 어떤 n 각형의 내각의 크기는 공차가 20° 인 등차수열을 이룬다고 한다. 가장 작은 내각의 크기가 40° 일 때, n 의 값을 구하여라. (단, 한 내각의 크기는 180° 보다 작다.)

67. 오른쪽 그림 같이 직선

l 위에 같은 간격으로

10개의 점

$P_1, P_2, P_3, \dots, P_{10}$ 을 잡고,

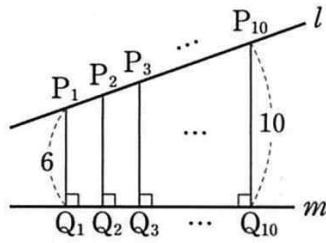
각 점에서 직선 m 에 내린

수선의 발을 차례로

$Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_{10}$ 이라 하자. $\overline{P_1Q_1} = 6$, $\overline{P_{10}Q_{10}} = 10$ 일 때,

$\overline{P_2Q_2} + \overline{P_3Q_3} + \overline{P_4Q_4} + \dots + \overline{P_9Q_9}$ 의 값은?

- ① 60 ② 61 ③ 62
④ 63 ⑤ 64



68. 그림과 같이 두 직선 $y = x$,

$y = a(x-1)$ ($a > 1$)의

교점에서 오른쪽 방향으로 y 축에

평행한 14개의 선분을 같은

간격으로 그렸다. 이들 중 가장

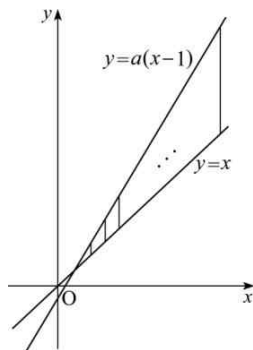
짧은 선분의 길이는 3이고, 가장

긴 선분의 길이는 42일 때,

14개의 선분의 길이의 합을

구하시오. (단, 각 선분의 양

끝점은 두 직선 위에 있다.)



유형 15

등차수열의 합과 일반항 사이의 관계

69. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이

$S_n = 2n^2 + 3n$ 일 때, a_{10} 은?

- ① 11 ② 21 ③ 31
④ 41 ⑤ 51

70. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라

하면 $S_n = 2n^2 + 12n$ 이다. $a_4 + a_8$ 의 값은?

- ① 68 ② 72 ③ 76
④ 80 ⑤ 84

71. 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = 2n^2 - 3n$ 인

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_k = 43$ 을 만족하는 상수 k 의 값은?

- ① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

72. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 - 6n$ 일 때, $1 \leq a_n \leq 40$ 을 만족시키는 자연수 n 의 개수는?

- ① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

73. 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 + 2n$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99}$ 의 값을 구하여라

74. 등차수열 $\{a_n\}$ 이

$a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n} = 2n^2 + 3n$ 을 만족할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하여라.

(2) $a_3 + a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} + a_{18}$ 의 값을 구하여라.

75. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 각각 $n^2 + kn + 2$, $2n^2 - 3n$ 인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 $a_{10} = b_{10}$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하여라

76. 첫째항이 0, 제 7항이 28인 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = an^2 + 2n + b$ 일 때, 상수 a, b 에 대하여 ab 의 값은?

- ① -8 ② -4 ③ 0
④ 4 ⑤ 8

77. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n , 수열 $\{a_nb_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 T_n 이라 하자.

$$S_n = n^2 + 1, \quad T_n = \frac{n(4n^2 + 21n - 1)}{6} + 6$$

일 때, 수열 $\{a_n + b_n\}$ 의 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하시오.

78. 공차가 d_1, d_2 인 두 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 각각 S_n, T_n 이라 하자.

$$S_n T_n = n^2(n^2 - 1)$$

일 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

— <보 기> —

ㄱ. $a_n = n$ 이면 $b_n = 4n - 4$ 이다.

ㄴ. $d_1 d_2 = 4$

ㄷ. $a_1 \neq 0$ 이면 $a_n = n$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

79. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. 수열 $\{S_{2n-1}\}$ 은 공차가 -3인 등차수열이고, 수열 $\{S_{2n}\}$ 은 공차가 2인 등차수열이다. $a_2 = 1$ 일 때, a_8 의 값을 구하시오.

80. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_2 + a_3 = 6, a_5 : a_7 = 1 : 4$$

일 때, a_{10} 의 값은?

- ① 2^8 ② 2^9 ③ 2^{10}
 ④ 3×2^8 ⑤ 3×2^9

81. 각 항이 실수이고 첫째항이 a , 공비가 r 인 등비수열

$\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = 2$, $a_6 : a_9 = 1 : 8$ 일 때, $\frac{r}{a}$ 의 값을
 구하여라

82. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_7 = 12$, $\frac{a_6 a_{10}}{a_5} = 36$ 이
 성립할 때, a_{15} 의 값을 구하시오.

83. 공비가 실수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\frac{a_5}{a_2} = 2$,
 $a_4 + a_7 = 12$ 일 때, a_{13} 의 값은?

- ① 30 ② 32 ③ 34
 ④ 36 ⑤ 38

84. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 + a_2 = 12$,

$$\frac{a_3 + a_7}{a_1 + a_5} = 4$$

를 만족시킬 때, a_4 의 값은?

- ① 24 ② 28 ③ 32
 ④ 36 ⑤ 40

85. 네 수 1, a , b , c 가 이 순서대로 공비가 1보다 큰
 등비수열을 이루고 $b^3 = 27ac$ 를 만족시킬 때, a 의 값은?

- ① $\sqrt{3}$ ② 3 ③ $3\sqrt{3}$
 ④ 9 ⑤ $9\sqrt{3}$

86. 공비가 실수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 + a_2 + a_3 = 6, a_4 + a_5 + a_6 = 48$$

이 성립할 때, $a_2 + a_4 + a_6$ 의 값을 구하여라

87. $a_2 = 10$, $a_4 = 100$ 이고 공비가 양수인 등비수열

$\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 a_4 a_6 \cdots a_{20}$ 의 값은?

- ① 10^{55} ② 10^{56} ③ 10^{57}
 ④ 10^{58} ⑤ 10^{59}

88. 그림과 같이 각 단의 부피가 일정한 비율로 감소하는 8단 케이크를 만들었다. 이 케이크의 제 2단의 부피를 p , 제 4단의 부피를 q 라 할 때, 제 8단의 부피를 p 와 q 로 나타낸 것은?



- ① $\frac{q^3}{p^2}$ ② $\frac{q^2}{p^2}$ ③ $\frac{p^3}{q^2}$
 ④ $\frac{p^3}{q}$ ⑤ $\frac{p^2}{q}$

89. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$\frac{a_{11}}{a_1} + \frac{a_{12}}{a_2} + \frac{a_{13}}{a_3} + \frac{a_{14}}{a_4} + \frac{a_{15}}{a_5} = 20$ 일 때, $\frac{a_{40}}{a_{20}}$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 4
 ④ 8 ⑤ 16

90. 첫째항이 a ($a \neq 0$)이고 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\frac{a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} + a_{13}}{a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}}$ 의 값을 구하여라.

91. 공비가 1이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 등비수열인 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

$\neg. \left\{ \frac{n}{a_n} \right\} \quad \neg. \{a_{n+1} + a_n\} \quad \neg. \{a_n^2\}$

- ① $\neg$ ② $\neg$ ③ $\neg$
 ④ $\neg, \neg$ ⑤ $\neg, \neg, \neg$

92. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고르시오.

<보 기>

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열이면 수열 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 도 등비수열이다.

ㄴ. 수열 $\{a_{n+1} + a_n\}$ 이 등차수열이면 수열 $\{a_n\}$ 도 등차수열이다.

ㄷ. 수열 $\{a_n a_{n+1}\}$ 이 등비수열이면 수열 $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ 도 등비수열이다.

93. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 a_2 = 6$, $a_3 a_4 = 12$ 일 때, $a_7 a_8$ 의 값을 구하시오.

94. 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$$a_4 b_4 = 3, \quad a_7 b_7 = 6$$

일 때, $a_{16} b_{16}$ 의 값은?

- ① 30 ② 36 ③ 42
 ④ 48 ⑤ 54

95. 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{3a_{n+1} - a_n\}$ 의 공비는? (단, $a_1 \neq 0$)

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

96. 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열을 이룰 때, 수열 $\{a_n + 2a_{n+1}\}$ 은 첫째항이 9이고, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열을 이룬다. 이때, 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항은?

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

유형 17

두 수 사이에 수를 넣어서 만든 등비수열

97. 두 수 2와 162 사이에 세 양수 a, b, c 를 넣어 2, $a, b, c, 162$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루도록 할 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

98. 두 수 54와 $\frac{64}{9}$ 사이에 네 수 a_1, a_2, a_3, a_4 를 넣어 54, $a_1, a_2, a_3, a_4, \frac{64}{9}$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루도록 할 때, $\sqrt{a_3}$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

99. 두 수 3과 40 사이에 10개의 수를 넣어 만든 등비수열 3, $a_1, a_2, \dots, a_{10}, 40$ 이 있다. 등식

$$3 + a_1 + a_2 + \dots + a_{10} + 40 = k \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{10}} + \frac{1}{40} \right)$$

을 만족시키는 상수 k 의 값을 구하시오.

100. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2a_4 = 16$, $a_3a_5 = 64$ 일 때, a_7 의 값을 구하시오.

101. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1a_5 = 9$, $a_2a_6 = 36$ 일 때, $8(a_1a_2 + a_3a_4)$ 의 값은?
 ① 153 ② 157 ③ 161
 ④ 165 ⑤ 169

102. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1a_9 = 4$ 일 때, $a_2a_8 + a_4a_6$ 의 값은?
 ① 8 ② 9 ③ 10
 ④ 11 ⑤ 12

103. 각 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 + a_2 = \frac{5}{8}$, $a_1a_2a_3 = \frac{1}{8}$ 일 때, 첫째항의 값은?

- ① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$
 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

104. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = \sqrt{5}$ 일 때, $a_1 \times a_2 \times a_4 \times a_5$ 의 값은?
 ① $\sqrt{5}$ ② 5 ③ $5\sqrt{5}$
 ④ 25 ⑤ $25\sqrt{5}$

105. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_5 \times a_6 = 2$ 가 성립할 때, $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_{10}$ 의 값은?
 ① 16 ② 20 ③ 24
 ④ 28 ⑤ 32

106. 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 a_{10} = 9$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 곱은?

- ① 3^{10} ② 3^{11} ③ 3^{12}
 ④ 3^{13} ⑤ 3^{14}

107. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$ 의 세 항 a_2, a_4, a_9 가 이 순서대로 공비 r 인 등비수열을 이룰 때, $6r$ 의 값을 구하시오.

108. 두 자연수 a, b 에 대하여 세 수 $a^n, 2^8 \times 3^6, b^n$ 이 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, ab 의 최솟값을 구하시오.

109. 이차방정식 $x^2 - kx + 125 = 0$ 의 두 근 α, β ($\alpha < \beta$)에 대하여 $\alpha, \beta - \alpha, \beta$ 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 양수 k 의 값을 구하시오.

110. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 를 만족시키고 $a_1 = 1$, $\frac{a_7}{a_2} + \frac{a_8}{a_3} + \frac{a_9}{a_4} + \frac{a_{10}}{a_5} = 20$ 일 때, a_{11} 의 값은?
 ① 22 ② 23 ③ 24
 ④ 25 ⑤ 26

111. 다항식 $f(x) = x^2 + 2x + a$ 를 일차식 $x+1, x-1, x-2$ 로 나누었을 때의 나머지를 각각 $\dot{R}_1, \dot{R}_2, \dot{R}_3$ 이라 할 때, $\dot{R}_1, \dot{R}_2, \dot{R}_3$ 은 이 순서대로 등비수열을 이룬다. 이때 상수 a 의 값을 구하여라.

112. 네 양수 2, a , b , 12에 대하여 2, a , b 는 이 순서대로 등비수열을 이루고, a , b , 12는 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

113. 서로 다른 세 실수 20, $x-9$, $y+3$ 은 이 순서대로 등차수열을 이루고, $x-9$, $y+3$, 2는 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 두 양수 x , y 에 대하여 xy 의 값을 구하여라.

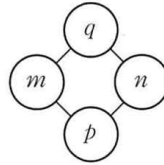
114. 다섯 개의 실수 a , b , c , d , e 를 적당히 배열하며 공비가 1보다 큰 등비수열을 만들었다. a , b , c , d , e 가 다음 세 조건을 만족할 때, c 는 이 수열의 제 n 항이라 한다. 이때, 자연수 n 의 값을 구하여라.

(가) $d = \sqrt{ae}$

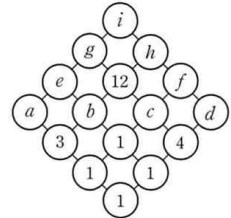
(나) $a = kd$, $b = \frac{e}{k}$ (단, k 는 0이 아닌 상수)

(다) $a < c$

115. 두 자연수 m 과 n 의 최대공약수를 p , 최소공배수를 q 라 할 때, 이런 관계를 만족시키는 수를 [그림 1]과 같이 나타내기로 하자. [그림 2]는 [그림 1]의 관계를 만족시키도록 수를 연결하여 나타낸 것이다. 세 자연수 e , 12, f 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $e+f$ 의 값을 구하시오.



[그림 1]



[그림 2]

116. 0이 아닌 서로 다른 세 실수 a , b , c 에 대하여 $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ 이 이 순서대로 조화수열을 이루고, b , a , c 가 이 순서대로 등비수열을 이룬다. 세 수 a , b , c 의 곱이 27일 때, $a+2b+3c$ 의 값은?

① -20

② -19

③ -18

④ -17

⑤ -16

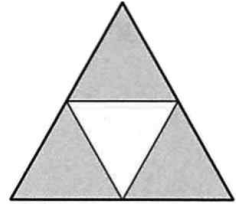
117. 등비수열을 이루는 세 실수의 합이 7이고 곱이 8일 때, 세 수 중 가장 큰 수는?

- ① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

118. 삼차방정식 $x^3 - px^2 + 156x - 216 = 0$ 의 세 실근이 등비수열을 이룰 때, 상수 p 의 값을 구하여라.

119. 한 변의 길이가 4인 정삼각형 모양의 종이가 있다.

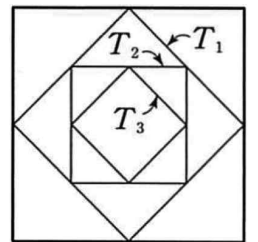
오른쪽 그림과 같이 1회의 시행에서 각 변의 중점을 이어서 만든 정삼각형을 오려낸다. 2회 시행에서는 1회 시행 후 남은



3개의 작은 정삼각형에서 같은 방법으로 만든 정삼각형을 오려낸다. 이와 같은 시행을 계속 할 때, 10회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는?

- ① $\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$ ② $\sqrt{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$ ③ $4\sqrt{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$
④ $\sqrt{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9$ ⑤ $3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9$

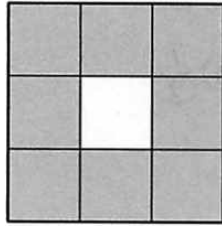
120. 넓이가 8인 정사각형 모양의 종이에서 오른쪽 그림과 같이 각 변의 중점을 이어 정사각형을 그리는 시행을 계속할 때, n 번째 그린 정사각형을 T_n 이라 하자. T_n 의 한 변의



길이가 $2 \cdot a^{n-1}$ 일 때, 실수 a 의 값을 구하여라.

121. 한 번의 길이가 3인

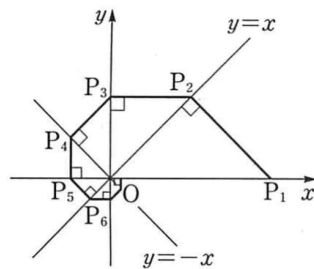
정사각형이 있다. 첫 번째 시행에서
오른쪽 그림과 같이 정사각형을
9등분하여 중앙의 정사각형을
버린다. 두 번째 시행에서는 첫 번째
시행의 결과로 남은 나머지 8개의
정사각형을 각각 9등분하여 중앙의 정사각형을 버린다.
이와 같은 시행을 계속할 때, 20번째 시행 후 남아 있는
도형의 넓이는?



- ① $\frac{2^{57}}{3^{38}}$ ② $\frac{2^{60}}{3^{38}}$ ③ $\frac{2^{57}}{3^{40}}$
④ $\frac{2^{60}}{3^{40}}$ ⑤ $\frac{2^{63}}{3^{40}}$

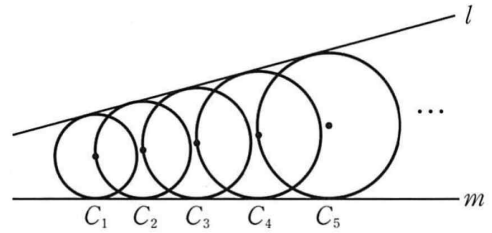
122. 점 P_1 의 좌표가

(1, 0)일 때, 오른쪽
그림과 같이 점 P_1 에서
직선 $y=x$ 에 내린
수선의 발을 P_2 , 점
 P_2 에서 y 축에 내린
수선의 발을 P_3 , 점
 P_3 에서 직선 $y=-x$ 에 내린 수선의 발을 P_4 , 점 P_4 에서
 x 축에 내린 수선의 발을 P_5 라 하자. 이와 같은 과정을
계속할 때, 다음 중 길이가 $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ 인 선분은?

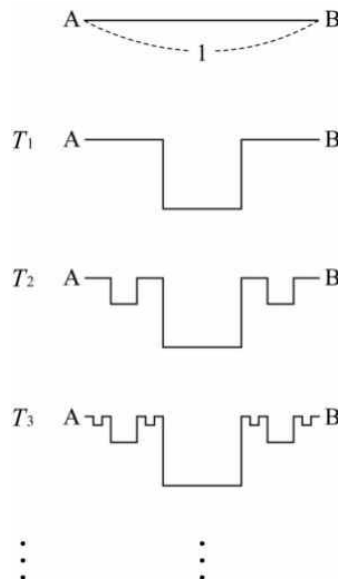


- ① $\overline{P_9P_{10}}$ ② $\overline{P_{10}P_{11}}$ ③ $\overline{P_{11}P_{12}}$
④ $\overline{P_{20}P_{21}}$ ⑤ $\overline{P_{21}P_{22}}$

123. 다음 그림과 같이 두 직선 l, m 에 동시에 접하는 원
 C_1 이 있다. 원 C_1 의 중심을 지나고 두 직선 l, m 에
동시에 접하면서 원 C_1 보다 큰 원을 C_2 라 하자. 이와
같은 방법으로 원 C_k 의 중심을 지나고 두 직선 l, m 에
동시에 접하면서 원 C_k 보다 큰 원을 C_{k+1} 이라 하자. 원
 C_1 의 넓이가 1, 원 C_5 의 넓이가 4이고, 원 C_k 의 넓이를
 S_k 라 할 때, $S_1 + S_3 + S_5 + \dots + S_{19}$ 의 값을 구하시오.
(단, $k=1, 2, 3, \dots$)



124. 길이가 1인 선분 AB가 있다. 그림과 같이 선분 AB를 3등분한 다음, 가운데 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고, 가운데 선분을 지워 만든 도형을 T_1 이라 하자. T_1 의 선분 중 원래의 선분 AB에서 남아 있는 두 선분을 각각 3등분한 다음, 가운데 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고, 가운데 선분을 지워 만든 도형을 T_2 라



하자. T_2 의 선분 중 원래의 선분 AB에서 남아 있는 네 선분을 각각 3등분한 다음, 가운데 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고, 가운데 선분을 지워 만든 도형을 T_3 이라 하자. 이와 같은 과정을 계속 반복하여 n 번째 만든 도형을 T_n 이라 하고, T_n 에 있는 모든 선분의 길이의 총합을 a_n 이라 하자. 이때 a_{20} 의 값은?

- ① $3\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{20}\right\}$ ② $3\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{21}\right\}$ ③ $3\left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{19}\right\}$
 ④ $3\left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{20}\right\}$ ⑤ $3\left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{21}\right\}$

유형 22

등비수열의 활용

125. A 도시의 인구는 매년 일정한 비율로 증가하여 10년 후에는 36만 명, 20년 후에는 81만 명이 될 것으로 예상된다. 이때 A 도시의 15년 후의 인구는 얼마가 될 것으로 예상할 수 있는가?

- ① 51만 명 ② 53만 명 ③ 54만 명
 ④ 55만 명 ⑤ 57만 명

126. 빛이 어떤 유리를 한 장 통과할 때마다 빛의 양이 20%씩 줄어든다고 한다. 이 유리를 두 장 통과한 후의 빛의 양은 처음 빛의 양의 몇 %인지 구하여라.

127. A, B 두 사람은 각각 같은 농도의 식염수를 10L씩 가지고 있다. A는 식염수 5L를 버리고 물 5L를 넣는 시행을 반복하고, B는 식염수 7.5L를 버리고 물 7.5L를 넣는 시행을 반복한다. A, B가 이와 같은 시행을 각각 p 번, q 번 반복하여 얻은 식염수의 농도가 서로같을 때, $p:q$ 를 가장 작은 자연수의 비로 나타내어라.

유형 23

등비수열의 합

128. 각 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 제 3항이 6이고 제 7항이 24일 때, $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{10}^2$ 의 값은?

- ① $3(2^9 - 1)$ ② $3(2^{10} - 1)$ ③ $9(2^9 - 1)$
 ④ $9(2^{10} - 1)$ ⑤ $9 \cdot 2^{10}$

129. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$a_n = 2^{2n-1}$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = \frac{2^p - 2}{3}$ 를 만족시키는 실수 p 의 값을 구하여라.

130. 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제5항까지의 합이

$\frac{31}{2}$ 이고, 곱이 32일 때, $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5}$ 의 값은?

- ① $\frac{31}{4}$ ② $\frac{31}{8}$ ③ $\frac{31}{12}$
 ④ $\frac{8}{31}$ ⑤ $\frac{4}{31}$

유형 24

부분의 합이 주어진 등비수열

131. 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 에 대하여 $S_n = 30$, $S_{2n} = 50$ 일 때, S_{3n} 의 값은?

- ① 60 ② $\frac{190}{3}$ ③ $\frac{200}{3}$
 ④ 70 ⑤ $\frac{220}{3}$

132. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = 50\sqrt{2},$$

$$a_{21} + a_{22} + a_{23} + \cdots + a_{30} = 450\sqrt{2}$$

일 때, $a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20}$ 의 값은?

- ① $150\sqrt{2}$ ② $200\sqrt{2}$ ③ $250\sqrt{2}$
 ④ $300\sqrt{2}$ ⑤ $350\sqrt{2}$

133. 첫째항부터 제 3 항까지의 합이 21, 첫째항부터 제 6 항까지의 합이 -147인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 제 5 항은?

(단, 수열 $\{a_n\}$ 의 공비는 실수이다.)

- ① -112 ② -56 ③ -28
 ④ 56 ⑤ 112

134. 첫째항부터 제4 항까지의 합이 -15, 첫째항부터 제8 항까지의 합이 -255이고 각 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 을 구하시오.

135. 첫째항이 a , 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $S_3 = 21$, $S_6 = 189$ 이다. 이때, 실수 r 의 값은?

- ① 2 ② 3 ③ 5
 ④ 6 ⑤ 7

136. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = 12,$$

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 8$$

일 때, 수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 구하여라.

137. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = 20,$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20} = 640$$

일 때, 공비를 구하여라.

138. 첫째항이 1인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서

$$a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2k} = 170,$$

$$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k-1} = 85$$

를 만족시키는 자연수 k 의 값을 구하여라.

유형 25

등비수열의 합과 일반항 사이의 관계

139. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을

S_n 이라 하면 $S_n = 2 \cdot 3^{n+1} + k$ 가 성립한다. 이때 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열을 이루도록 하는 상수 k 의 값을 구하여라.

140. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이

$S_n = 2^n - 1$ 일 때, a_9 의 값을 구하시오.

141. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이

$S_n = 5^n - 1$ 일 때, $a_1 + a_4$ 의 값을 구하여라.

142. 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = 2^n - 1$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 + a_5 + a_9$ 의 값은?

- ① 1 ② 8 ③ 16
④ 256 ⑤ 273

143. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면 $S_n + 100 = 10^{n+2}$ 을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n = p \cdot q^{n+1}$ 일 때, 실수 p, q 에 대하여 $p - q$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

144. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $S_n = 2^{n+1} - 2$ 이다. 이때 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$ 의 값을 구하여라.

유형 26

등차수열과 등비수열의 관계

145. 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 을 $b_n = 2^{a_n}$ 으로 정의할 때, 수열 $\{b_n\}$ 은 어떤 수열인가?

- ① 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이다.
② 첫째항이 1, 공비가 4인 등비수열이다.
③ 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이다.
④ 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이다.
⑤ 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이다.

146. 일반항이 $a_n = 2^{3n+1}$ 인 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 수열 $\left\{\frac{a_n}{2}\right\}$ 은 등비수열이다.

ㄴ. 수열 $\left\{S_n - \frac{a_n}{14}\right\}$ 은 등비수열이다.

ㄷ. $7S_n = 8(a_n - 2)$ 가 성립한다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

147. 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항이 3, 공차가 2인 등차수열일 때, 수열 $\{3^{a_n}\}$ 의 첫째항부터 제8항까지의 합을 구하여라.

149. 어느 기업에서는 신제품 개발에 필요한 연구비를 매년 일정한 비율로 증액한다고 한다. 2014년의 연구비가 10억 원이고, 2018년의 연구비가 2014년의 연구비의 4배가 되게 하려고 할 때, 2014년부터, 2018년까지 5년 동안의 연구비의 총액은? (단, $\sqrt{2} = 1.414$ 로 계산하고, 1억 원 미만은 버린다.)

- ① 110억 원 ② 112억 원 ③ 114억 원
④ 116억 원 ⑤ 118억 원

유형 27

등비수열의 합의 활용

148. 의학 기술이 발달되어 에이즈에 감염되는 사람의 수가 매년 일정한 비율로 감소한다고 하자. 2014년부터 2033년까지 20년 동안은 50만 명의 새로운 에이즈 환자가 발생하였고, 이 중 10만 명은 2024년부터 2033년까지의 10년 동안에 발생한다고 할 때, 2034년에 발생하는 새로운 환자의 수는 2014년에 발생한 새로운 환자의 수의 몇 배인가?

- ① $\frac{1}{2}$ 배 ② $\frac{1}{4}$ 배 ③ $\frac{1}{6}$ 배
④ $\frac{1}{8}$ 배 ⑤ $\frac{1}{16}$ 배

유형 28

원리합계 ; 적립

150. 영은이의 부모님은 매년 초에 일정한 금액을 적립하여 3년 후에 영은이의 대학 등록금 420만 원을 마련하려고 한다. 연이율이 5%이고 1년마다 복리로 계산할 때, 매년 초에 얼마씩 적립하여야 하는가? (단, $1.05^3 = 1.16$ 으로 계산한다.)

- ① 110만 원 ② 115만 원 ③ 120만 원
④ 125만 원 ⑤ 130만 원

151. 월이율 1%, 1개월마다 복리로 매월 초에 10000원씩 적립할 때, 3년 후의 월말의 원리합계를 구하여라. (단, $1.01^{36} = 1.4$ 로 계산한다.)

152. 어느 직장인이 노후 생활을 위하여 연봉의 일부를 매년 초에 적립하는데 임금 인상률을 감안하여 매년 전년도보다 10%씩 증액하려고 한다. 2015년 1월 1일부터 500만 원을 저금하기 시작한다면 2024년 12월 31일까지 저금한 금액의 원리합계를 구하여라. (단, $1.1^{10} = 2.6$, 연이율 10%, 1년마다의 복리로 계산한다.)

유형 29

원리합계 ; 상환 · 연금

153. 이달 초 가격이 20만 원인 물건을 할부로 구입하고 이달 말부터 매달 일정한 금액을 12개월에 걸쳐 갚는다면 매달 얼마씩 갚아야 하는가? (단, $1.015^{12} = 1.2$, 월이율은 1.5%, 1개월마다의 복리로 계산한다.)

- ① 16000 원 ② 17000 원 ③ 원18000
④ 19000 원 ⑤ 20000 원

154. 올해부터 매년 말에 500만 원씩 10년 간 받는 연금이 있다. 이 연금을 올해 초에 한꺼번에 받는다면 약 얼마를 받게 되는가? (단, $1.05^{10} = 1.63$, 연이율 5%, 1년마다의 복리로 계산하고 1000원 미만은 버린다.)

- ① 3857만 원 ② 3865만 원 ③ 3872만 원
④ 3884만 원 ⑤ 3891만 원

155. A는 퇴직금으로 1억 8천만 원을 받을 예정인데 이 돈을 은행에 예치하고 매년 말에 일정한 금액씩 연금 형식으로 받으려고 한다. 퇴직금을 모두 1월 초에 은행에 예치하고, 연말부터 12년 간 지급받는다면 매년 받을 금액은 얼마인지 구하여라.

(단, $1.06^{12} = 2$, 연이율 6%, 1년마다 복리로 계산한다.)

156. 2000만 원짜리 자동차를 구입하는데 1000만 원은 구입시 현금으로 지불하고 나머지 1000만 원은 할부로 지불하기로 하였다. 구입한 날로부터 1개월 후부터 매달 일정한 금액을 36회로 나누어 갚는다면 매달 얼마씩 갚아야 하는지 구하여라. (단, $1.01^{36} = 1.4$, 월이율은 1%, 1개월마다의 복리로 계산한다.)

정답 및 해설

1. [정답] 6

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot (-2) = -2n + a_1 + 2 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} 2 - 3a_n &= 2 - 3(-2n + a_1 + 2) = 6n - 3a_1 - 4 \\ &= 2 - 3a_1 + (n-1) \cdot 6 \end{aligned}$$

따라서 등차수열 $\{2 - 3a_n\}$ 의 공차는 6이다.

2. [정답] ④

[출제의도] 등차수열의 공차 구하기

수열 a_n 의 첫째항을 a

수열 b_n 의 첫째항을 b 라고 할 때,

$$\begin{aligned} 3a_n + 5b_n &= 3a - 6(n-1) + 5b + 15(n-1) \\ &= 3a + 5b + 9(n-1) \end{aligned}$$

$\therefore$ 수열 $\{3a_n + 5b_n\}$ 의 공차는 9

3. [정답] 12

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 등차수열 $\{a_{2n}\}$ 은

$a_2, a_4, a_6, \dots$ 이고 공차가 8이므로

$$\begin{aligned} a_4 - a_2 &= 8, \quad (a + 3d) - (a + d) = 8 \\ 2d &= 8 \quad \therefore d = 4 \end{aligned}$$

등차수열 $\{a_{3n+1}\}$ 은 $a_4, a_7, a_{10}, \dots$ 이므로

$$a_7 - a_4 = (a + 6d) - (a + 3d) = 3d = 3 \cdot 4 = 12$$

따라서 등차수열 $\{3a_{n+1}\}$ 의 공차는 12이다.

4. [정답] ⑤

공차가 3인 등차수열의 일반항은 $a_n = 3n + b$ (단, b 는 상수)

ㄱ. $3a_n = 9n + 3b$ 이므로 공차가 9인 등차수열 $\therefore$ 참

ㄴ. $a_{2n-1} = 3(2n-1) + b = 6n - 3 + b$ 이므로 공차가 6인 등차수열 $\therefore$ 참

ㄷ. $2a_{2n} - a_{2n-1} = 2(3 \cdot 2n + b) - \{3(2n-1) + b\}$
 $= 6n + 3 + b$ 이므로 공차가 6인 등차수열 $\therefore$ 참

5. [정답] 199

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_5 = a + 4d = 9 \quad \dots\dots ㉠$$

$$a_{12} = a + 11d = 23 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 1, d = 2$

따라서 $a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$ 이므로

$$a_{100} = 2 \cdot 100 - 1 = 199$$

6. [정답] 27

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3 = a + 2d = 2 \quad \dots\dots ㉠ \quad a_6 = a + 5d \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -8, d = 5$

$$\therefore a_8 = 27$$

7. [정답] ③

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3 = 8 \text{ 에서 } a + 2d = 8 \quad \dots\dots ㉠$$

$$a_{10} = 29 \text{ 에서 } a + 9d = 29 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 2, d = 3$

$$\therefore a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$$

이때, 제 n 항을 200이라 하면

$$3n - 1 = 200 \quad \therefore n = 67$$

따라서 200은 제 67 항이다.

8. [정답] $a_n = 4n - 18$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$\begin{aligned} a_2 + a_7 &= 0 \text{ 이므로 } (a + d) + (a + 6d) = 0 \\ \underbrace{a_2 + a_7}_{a_2 = -a_7} & \quad \therefore 2a + 7d = 0 \quad \dots\dots ㉠ \end{aligned}$$

또 $a_4 = -2$ 이므로 $a + 3d = -2 \quad \dots\dots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -14, d = 4$

$$\therefore a_n = -14 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 18$$

9. [정답] ①

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째 항이 5, 공차가 3이므로

$$a_n = 5 + (n-1) \cdot 3 = 3n + 2$$

이때 $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_{18} - a_{17} = 3$ 이므로

$$a_4 - a_2 = a_6 - a_4 = a_8 - a_6 = \dots = a_{18} - a_{16} = 6$$

$$\therefore \frac{1}{a_2 a_4} + \frac{1}{a_4 a_6} + \frac{1}{a_6 a_8} + \dots + \frac{1}{a_{16} a_{18}}$$

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \left\{ \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_4} \right) + \left(\frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_6} \right) + \left(\frac{1}{a_6} - \frac{1}{a_8} \right) + \dots + \left(\frac{1}{a_{16}} - \frac{1}{a_{18}} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_{18}} \right)$$

$a_2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8, a_{18} = 3 \cdot 18 + 2 = 56$ 이므로 구하는 값은

$$\frac{1}{6} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{56} \right) = \frac{1}{56}$$

10. [정답] -34

주어진 직선 위의 점 $P_n (n=1, 2, 3, \dots)$ 의 x 좌표를 x_n , y 좌표를 y_n 이라 하면

$$\{x_n\} : 5, 2, -1, -4, \dots$$

즉, 수열 $\{x_n\}$ 은 첫째항이 5, 공차가 -3인 등차수열이므로 일반항 x_n 은

$$x_n = 5 + (n-1) \times (-3) = -3n + 8$$

$$\{y_n\} : 0, 2, 4, 6, \dots$$

즉, 수열 $\{y_n\}$ 은 첫째항이 0, 공차가 2인 등차수열이므로 일반항 y_n 은

$$y_n = 0 + (n-1) \times 2 = 2n - 2$$

$$\therefore a = x_{40} = -3 \times 40 + 8 = -112$$

$$b = y_{40} = 2 \times 40 - 2 = 78$$

$$\therefore a + b = (-112) + 78 = -34$$

11. [정답] ③

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_7 = a + 6d = 29 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_{10} = a + 9d = 20 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = 47, d = -3$

$$\therefore a_n = 47 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 50$$

$$-3n + 50 < 0 \text{에서 } 3n > 50 \quad \therefore n > \frac{50}{3} = 16.\overline{6}$$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제 17항이다.

12. [정답] ②

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 = 3a + 3d = -138 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_4 + a_5 + a_6 = 3a + 12d = -102 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = -50, d = 4$

$$\therefore a_n = -50 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 54$$

$$a_k = 4k - 54 = 22 \text{에서 } k = 19$$

13. [정답] 17

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면

$$a_{23} = a + 22 \cdot 4 = 23 \quad \therefore a = -65$$

$$\therefore a_n = -65 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 69$$

● 30%

$$4n - 69 = 0 \text{에서 } n = 17.25$$

● 20%

이때 $a_{17} = 4 \cdot 17 - 69 = -1, a_{18} = 4 \cdot 18 - 69 = 3$ 이므로

$$|a_{17}| < |a_{18}|$$

따라서 구하는 자연수 n 의 값은 17이다.

● 50%

참고 주어진 등차수열 $\{a_n\}$ 에서

$$\dots > |a_{15}| > |a_{16}| > |a_{17}|, \quad |a_{17}| < |a_{18}| < |a_{19}| < \dots$$

이므로 $|a_{17}|$ 의 값이 최소가 된다.

14. [정답] 5

주어진 등차수열의 공차를 d 라 하면 첫째항이 1, 제21항이 101이므로 $1 + 20d = 101, \quad 20d = 100 \quad \therefore d = 5$

15. [정답] 11

첫째항이 -3, 공차가 $\frac{3}{2}$ 인 등차수열의 제 $(n+2)$ 항이 15이므로

$$-3 + (n+1) \cdot \frac{3}{2} = 15$$

$$\frac{3}{2}(n+1) = 18, \quad n+1 = 12 \quad \therefore n = 11$$

16. [정답] ②

주어진 등차수열의 공차를 d 라 하면

수열 4, $a_1, a_2, \dots, a_m, 16$ 에서 16은 제 $(m+2)$ 항이므로
첫째항은 4

$$4 + (m+1)d = 16 \quad \therefore d = \frac{12}{m+1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 수열 16, $b_1, b_2, \dots, b_n, 40$ 에서 16을 첫째항으로 보면 40은 제 $(n+2)$ 항이므로

$$16 + (n+1)d = 40 \quad \therefore d = \frac{24}{n+1} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \frac{12}{m+1} = \frac{24}{n+1} \text{이므로}$$

$$12(n+1) = 24(m+1)$$

$$n+1 = 2(m+1) \quad \therefore n = 2m+1$$

17. [정답] $\frac{3}{2}$

수열 x, a_1, a_2, a_3, y 의 공차를 d_1 이라 하면

$$y = x + 4d_1 \text{에서 } d_1 = \frac{y-x}{4}$$

또한, 수열 $x, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, y$ 의 공차를 d_2 라 하면

$$y = x + 6d_2 \text{에서 } d_2 = \frac{y-x}{6}$$

$$\therefore \frac{a_2 - a_1}{b_5 - b_4} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{\frac{y-x}{4}}{\frac{y-x}{6}} = \frac{3}{2} (\because x \neq y)$$

특강 문제에서 조건 ' $x \neq y$ '가 있는 이유

만약 $x = y$ 이면 두 등차수열 x, a_1, a_2, a_3, y 와

$x, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, y$ 의 공차는 모두 0일 수밖에 없다.

이때, $b_5 - b_4$ 는 수열 $x, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, y$ 의 공차로 그 값

이 0이면 $\frac{a_2 - a_1}{b_5 - b_4}$ 의 값은 존재하지 않는다.

따라서 문제에서 구하는 식의 값이 존재하기 위해서는 조건 ' $x \neq y$ '가 반드시 필요하다.

18. [정답] -1

세 수 $2a, a^2+2a, 4$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2(a^2+2a) = 2a+4, \quad \underbrace{a^2+a-2=0}_{\text{근과 계수의 관계를 이용할 수도 있다.}}$$

$$(a+2)(a-1) = 0 \quad \therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 1$$

따라서 모든 a 의 값의 합은 -1 이다.

참고 $a = -2$ 일 때, 주어진 세 수는 $-4, 0, 4$ 이므로 공차가 4인 등차수열을 이루고, $a = 1$ 일 때, 주어진 세 수는 $2, 3, 4$ 이므로 공차가 1인 등차수열을 이룬다.

19. [정답] 24

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3 + a_5 = 36 \text{에서 } (a+2d) + (a+4d) = 36$$

$$2a + 6d = 36 \quad \therefore a + 3d = 18 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_2 a_4 = 180 \text{에서}$$

$$(a+d)(a+3d) = (a+d) \times 18 (\because \textcircled{1}) \\ = 180$$

$$\therefore a+d = 10 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 6, d = 4$$

$$\therefore a_n = 6 + (n-1) \times 4 = 4n + 2$$

이때, $a_n = 4n + 2 < 100$ 이므로

$$4n < 98 \quad \therefore n < 24.5$$

따라서 조건을 만족하는 자연수 n 의 최댓값은 24이다.

20. [정답] ①

[출제의도] 등비수열의 일반항 구하기

첫째 항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$ar + ar^3 = ar(1+r^2) = 810,$$

$$ar^4 + ar^6 = ar^4(1+r^2) = 30 \text{이므로}$$

두 식을 나누면

$$\frac{ar^4(1+r^2)}{ar(1+r^2)} = \frac{30}{810}, \quad r^3 = \frac{1}{27}, \quad r = \frac{1}{3}$$

따라서 $a = 3^7$

$$a_{10} = 3^7 \left(\frac{1}{3} \right)^{10-1} = \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{9}$$

21. [정답] ⑤

0이 아닌 다섯 개의 수 a, b, c, d, e 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2c = b+d = a+e$$

$$\therefore \frac{b+d}{2} + \frac{a+e}{4} = \frac{2c}{2} + \frac{2c}{4} = \frac{3}{2}c = kc$$

$$\therefore k = \frac{3}{2}$$

다른풀이

0이 아닌 다섯 개의 수 a, b, c, d, e 는 이 순서대로 등차수열을 이

루므로 공차를 x 라 하면

$a, b = a+x, c = a+2x, d = a+3x, e = a+4x$ 로 놓을 수 있다.

$$\frac{b+d}{2} + \frac{a+e}{4} = kc \text{에서}$$

$$\frac{(a+x) + (a+3x)}{2} + \frac{a + (a+4x)}{4} = k(a+2x)$$

$$\frac{4a+8x+2a+4x}{4} = k(a+2x)$$

$$\frac{3}{2}(a+2x) = k(a+2x)$$

$$\therefore k = \frac{3}{2} (\because a+2x = c \neq 0)$$

22. [정답] 18

세 수 $a, b, 14$ 와 세 수 $14, d, f$ 가 각각 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2d = a+14 \quad \dots\dots \textcircled{1}, \quad 2d = 14+f \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{을 하면 } 2(b-d) = a-f$$

한편 세 수 $b, c, 0$ 과 세 수 $6, c, d$ 가 각각 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$\underbrace{2c = b, \quad 2c = 6+d}_{2c = b = 6+d}$$

$$b = 6+d \quad \therefore b-d = 6$$

$$\therefore a+b-d-f = (a-f) + (b-d) \\ = 3(b-d) = 3 \cdot 6 = 18$$

23. [정답] 51

6개의 수 a, b, c, d, e, f 를 표와 같이 넣고, 등차중항을 이용하여 수를 구할 수 있다.

$$\therefore a = 5, b = 6, c = 8, d = 10, e = 9,$$

$$f = 13$$

$$\therefore a + b + c + d + e + f = 51$$

3	a	7
b	c	d
e	11	f

24. [정답] ③

삼차방정식의 세 근을 $a-d, a, a+d$ 로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 세 근의 합은

$$(a-d) + a + (a+d) = 15$$

$$3a = 15 \quad \therefore a = 5$$

따라서 주어진 방정식의 한 근이 5이므로 방정식에 $x=5$ 를 대입하면

$$5^2 - 15 \cdot 5^2 + 5k - 105 = 0, \quad 5k = 355 \quad \therefore k = 71$$

25. [정답] ④

삼차방정식 $x^3 - 6x^2 - 4x + k = 0$ 의 세 근이 작은 것부터 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 $d (d > 0)$ 라 하면 세 근은

$a-d, a, a+d$ 로 놓을 수 있다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(a-d) + a + (a+d) = 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a(a-d) + a(a+d) + (a-d)(a+d) = -4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$a(a-d)(a+d) = -k \quad \dots\dots \textcircled{\text{B}}$$

㉑에서 $3a=6$ 이므로 $a=2$ 이고, 이것을 ㉒에 대입하면

$$2(2-d) + 2(2+d) + (2-d)(2+d) = -4$$

$$4-2d+4+2d+4-d^2 = -4$$

$$12-d^2 = -4, \quad d^2 = 16 \quad \therefore d=4 (\because d>0)$$

$a=2, d=4$ 를 ㉒에 대입하면

$$2 \times (2-4)(2+4) = -k, \quad -24 = -k$$

$$\therefore k=24$$

26. [정답] 38

삼차방정식 $x^3-9x^2+ax+b=0$ 의 세 근이 1, α, β 이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$1+\alpha+\beta=9 \quad \dots\dots \textcircled{\text{A}}$$

$$\alpha+\beta+\alpha\beta=a \quad \dots\dots \textcircled{\text{B}}$$

$$\alpha\beta=-b \quad \dots\dots \textcircled{\text{C}}$$

이때, 세 수 1, α, β 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2\alpha=1+\beta \quad \dots\dots \textcircled{\text{D}}$$

㉑, ㉒을 연립하여 풀면 $\alpha=3, \beta=5$

이것을 ㉒, ㉒에 대입하면 $a=23, b=-15$

$$\therefore a-b=23-(-15)=38$$

27. [정답] 15

네 수를 $a-3d, a-d, a+d, a+3d$ 로 놓으면

$$(a-3d) + (a-d) + (a+d) + (a+3d) = 12 \quad \dots\dots \textcircled{\text{A}}$$

$$(a-3d)(a+3d) = -135 \quad \dots\dots \textcircled{\text{B}}$$

㉑에서 $4a=12 \quad \therefore a=3$

$a=3$ 을 ㉒에 대입하면

$$(3-3d)(3+3d) = -135$$

$$9-9d^2 = -135, \quad d^2 = 16$$

$$\therefore d = \pm 4$$

따라서 네 수는 $-9, -1, 7, 15$ 이므로 가장 큰 수는 15이다.

28. [정답] ②

세 변을 $a=b-d, b, c=b+d$ 로 놓으면 피타고라스의 정리에서

$$(b+d)^2 = (b-d)^2 + b^2 \Leftrightarrow b^2 - 4bd = 0 \Leftrightarrow b(b-4d) = 0$$

$$\therefore b=4d (\because b>0)$$

$$a=4d-d=3d, \quad c=4d+d=5d$$

$$\text{삼각형의 넓이} = \frac{1}{2} \times 3d \times 4d = 6d^2$$

29. [정답] 25

직각삼각형의 세 변의 길이를 $a-d, a, a+d$

$$\left(0 < d < \frac{a}{2}\right)$$

삼각형의 결정조건에 의하여

$$(a-d)+a>a+d \quad \therefore 0 < d < \frac{a}{2}$$

로 놓으면 피타고라스 정리에 의하여

$$(a+d)^2 = (a-d)^2 + a^2$$

$$a(a-4d) = 0 \quad \therefore a=4d (\because a \neq 0) \quad \dots\dots \textcircled{\text{A}}$$

$$\text{조건 (나)에서} \quad \frac{1}{2}a(a-d) = 150$$

$$\therefore a^2 - ad = 300 \quad \dots\dots \textcircled{\text{B}}$$

㉑을 ㉒에 대입하면

$$16d^2 - 4d^2 = 300, \quad d^2 = 25 \quad \therefore d=5 (\because d>0)$$

따라서 직각삼각형의 빗변의 길이는

$$a+d=5d=25$$

30. [정답] ③

각 학생이 받은 공책의 수를 작은 것부터 차례대로

$a-2d, a-d, a+d, a+2d$ ($d>0$) 라 하면

$$(a-2d) + (a-d) + a + (a+d) + (a+2d) = 60$$

$$5a=60 \quad \therefore a=12$$

또 $(a-2d) + (a-d) = \frac{1}{3} \{a + (a+d) + (a+2d)\}$ 이므로

$$2a-3d = \frac{1}{3}(3a+3d) \quad \therefore a=4d \quad \dots\dots \textcircled{\text{A}}$$

$a=12$ 를 ㉒에 대입하면 $4d=12 \quad \therefore d=3$

따라서 가장 많이 받은 학생의 공책의 수는

$$a+2d=12+2 \cdot 3=18$$

31. [정답] ①

$\frac{1}{a_n} = b_n$ 이라 하면, $\{b_n\}$ 은 공차가 $\frac{1}{2}$ 인 등차수열이다.

$b_1=1$ 이므로 $b_n = 1 + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n+1}{2}$ 이다.

따라서 $a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{2}{n+1}$ 이므로 $a_{20} = \frac{2}{21}$

32. [정답] ④

$\frac{1}{16}, x, y, \frac{1}{7}$ 의 역수를 각각 취하면 $16, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, 7$

즉 네 수 $16, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, 7$ 이 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

16을 첫째항으로 하는 등차수열의 제4항이 7이므로 공차를 d 라 하면

$$16+3d=7 \quad \therefore d=-3$$

따라서 $\frac{1}{x}=13, \frac{1}{y}=10$ 이므로 $x=\frac{1}{13}, y=\frac{1}{10}$

$$\therefore x+y = \frac{1}{13} + \frac{1}{10} = \frac{23}{130}$$

33. [정답] ②

주어진 수열의 각 항의 역수를 취하면

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \dots, \text{즉} \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \dots$$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공차가 $\frac{1}{4}$ 인 등차수열이므로

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{4} + (n-1) \cdot \frac{1}{4} = \frac{n}{4} \quad \therefore a_n = \frac{4}{n}$$

$$\therefore a_{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

34. [정답] ①

세 수 $a, 4, b$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$8 = a + b \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또 세 수 $a, 3, b$ 의 역수를 각각 취하면 $\frac{1}{a}, \frac{1}{3}, \frac{1}{b}$

따라서 세 수 $\frac{1}{a}, \frac{1}{3}, \frac{1}{b}$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad \therefore \frac{2}{3} = \frac{a+b}{ab} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

①을 ②에 대입하면 $\frac{2}{3} = \frac{8}{ab} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$

$$\therefore ab = 12$$

35. [정답] ④

[출제의도] 등차수열의 일반항을 구할 수 있는가?

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_4 = a_1 + 3d$$

$$= 1 + 3d = 7$$

$$\therefore d = 2$$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$= 1 + (n-1) \times 2$$

$$= 2n - 1$$

$$\therefore a_2 + a_3 = 3 + 5 = 8$$

다른풀이 등차수열 $\{a_n\}$ 의 성질에 의해

$$a_2 + a_3 = a_1 + a_4$$

$$= 1 + 7 = 8$$

36. [정답] 20

[출제의도] 등차수열의 성질을 이용하여 식의 값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_2 + a_4 + a_6 = 3a + 9d = 30 \quad \therefore a + 3d = 10$$

$$\therefore a_1 + a_7 = 2(a + 3d) = 20$$

37. [정답] 21

[출제의도] 등차수열의 성질을 이해한다.

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 2 \text{에서}$$

$$a_3 = 7, a_5 = 13 \text{이므로 } a_1 + a_3 + a_5 = 21$$

38. [정답] 200

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_6 + a_{11} + a_{15} + a_{20} = 4a + 48d = 32$$

$$\therefore a = 8 - 12d$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{25} = \frac{25 \{2(8 - 12d) + (25 - 1)d\}}{2} = 200$$

39. [정답] 13

조건 (가), (나)에서

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 26, a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 134$$

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 160$$

이때, 수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} \text{에서}$$

$$4(a_1 + a_n) = 160$$

$$\therefore a_1 + a_n = 40$$

조건 (다)에서 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 260$ 이므로

$$\frac{n(a_1 + a_n)}{2} = 260, \frac{40n}{2} = 260$$

$$\therefore n = 13$$

단계	채점 기준	배점
가	조건 (가), (나)에서 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 26$, $a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 134$ 를 구한 경우	20%
나	등차수열의 성질로 $a_1 + a_n$ 의 값을 구한 경우	50%
다	조건 (다)에서 등차수열의 합의 공식을 이용하여 n 의 값을 구한 경우	30%

40. [정답] 10

[출제의도] 등차수열을 활용하여 문제해결하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 할 때, $a_1 = 1$ 이므로

$$a_n = 1 + (n-1)d$$

$$(가)에\ 의하여\ (1+d) + (1+5d) + (1+9d) = 8$$

$$\therefore d = \frac{1}{3}$$

$$(나)에\ 의하여\ \frac{n \left\{ 2 + \frac{1}{3}(n-1) \right\}}{2} = 25$$

$$n^2 + 5n - 150 = 0$$

$$(n-10)(n+15) = 0$$

$$\text{따라서 } n = 10$$

41. [정답] ①

첫째항이 50, 제 n 항이 -10 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 220이므로

$$\frac{n \{50 + (-10)\}}{2} = 220, \quad 20n = 220, \quad \therefore n = 11$$

즉 $a_{11} = -10$ 이므로 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$50 + 10d = -10, \quad 10d = -60 \quad \therefore d = -6$$

다른풀이 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_n = 50 + (n-1)d = -10$$

$$\therefore (n-1)d = -60 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_n = \frac{n\{100 + (n-1)d\}}{2} = 220 \text{에 } \textcircled{1} \text{을 대입하면}$$

$$\frac{n(100-60)}{2} = 220 \quad \therefore n = 11$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } d = -6$$

42. [정답] -90

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3 = a + 2d = -4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

● 20%

$$a_5 : a_8 = 2 : 3 \text{에서 } (a+4d) : (a+7d) = 2 : 3$$

$$3(a+4d) = 2(a+7d)$$

$$\therefore a = 2d \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

● 20%

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } 4d = -4 \quad \therefore d = -1$$

$$d = -1 \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } a = -2$$

● 30%

따라서 첫째항부터 제12항까지의 합은

$$\frac{12\{2 \cdot (-2) + (12-1) \cdot (-1)\}}{2} = -90$$

● 30%

43. [정답] ⑤

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_{10} = 50 + 9d = 23, \quad 9d = -27 \quad \therefore d = -3$$

$$\therefore a_n - 50 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 53$$

$$a_n < 0 \text{에서 } -3n + 53 < 0 \quad \therefore n > \frac{53}{3} = 17.\times\times\times$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항부터 제17항까지 양수이고, 제18항부터 음수이다.

$$a_{17} = 2, \quad a_{18} = -1, \quad a_{30} = -37 \text{이므로}$$

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_{30}|$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{17}) - \underbrace{(a_{18} + a_{19} + a_{20} + \dots + a_{30})}_{\text{제18항부터 제30항까지의 항수는 } 30-18+1=13}$$

$$= \frac{17(50+2)}{2} - \frac{13\{-1+(-37)\}}{2}$$

$$= 442 + 247 = 689$$

44. [정답] 612

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3 = -4 \text{에서 } a + 2d = -4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_9 = 44 \text{에서 } a + 8d = 44 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = -20, \quad d = 8$$

$$\therefore a_n = -20 + (n-1) \times 8 = 8n - 28$$

이때, $8n - 28 < 0$ 에서 $n < 3.5$ 이므로

$n \leq 3$ 이면 $a_n < 0$ 이고, $n \geq 4$ 이면 $a_n > 0$ 이다.

$$\therefore |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_{15}|$$

$$\begin{aligned} &= -(a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + \dots + a_{15}) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}) - 2(a_1 + a_2 + a_3) \\ &= \frac{15\{2 \times (-20) + (15-1) \times 8\}}{2} - 2(-20 - 12 - 4) \\ &= 540 + 72 = 612 \end{aligned}$$

45. [정답] 61

[출제의도] 등차수열의 합에 대한 성질을 이용하여 조건에 맞는 자연수를 추측한다.

수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$T_n = \left| \frac{n\{120 + (n-1)d\}}{2} \right|$$

$$T_{20} = T_{21} \text{이므로}$$

$$\left| \frac{20(120+19d)}{2} \right| = \left| \frac{21(120+20d)}{2} \right|$$

$$\text{i) } \frac{20(120+19d)}{2} = \frac{21(120+20d)}{2} \text{ 일 때}$$

$$d = -3$$

이때 조건 $T_{19} < T_{20}$ 이 성립한다.

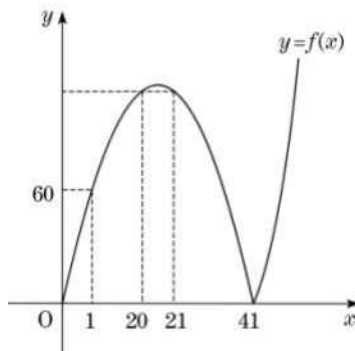
$$\text{ii) } \frac{20(120+19d)}{2} = -\frac{21(120+20d)}{2} \text{ 일 때}$$

$$d = -\frac{123}{20}$$

이때 조건 $T_{19} < T_{20}$ 이 성립하지 않는다.

$$\text{따라서 } T_n = \left| \frac{-3n^2 + 123n}{2} \right| \text{이다.}$$

$f(x) = \left| \frac{-3x^2 + 123x}{2} \right|$ 라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



위 그래프에서 $f(41) = 0$ 이므로 $T_{41} = 0$

그러므로 $T_{21} > T_{22} > T_{23} > \dots > T_{41} = 0, \quad T_{41} < T_{42}$

따라서 $T_n > T_{n+1}$ 을 만족시키는 n 의 값은

21, 22, 23, ..., 40이다.

그러므로 최솟값과 최댓값의 합은

$$21 + 40 = 61$$

46. [정답] ③

첫째항이 4, 끝항이 56, 항수가 $n+2$ 인 등차수열의 합이 660이므로

$$\frac{(n+2)(4+56)}{2} = 660, \quad n+2=22$$

$$\therefore n=20$$

47. [정답] 8

첫째항이 -6, 끝항이 30, 항의 개수가 $n+2$ 인 등차수열의 합이 120이므로

$$\frac{(n+2)(-6+30)}{2} = 120, \quad 12(n+2) = 120$$

$$n+2=10 \quad \therefore n=8$$

48. [정답] 420

첫째항이 -3, 끝항이 33, 항수가 30인 등차수열의 합은

$$\frac{30(-3+33)}{2} = 450$$

따라서 $-3+x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{28}+33=450$ 이므로

$$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{28}=450-(-3+33)=420$$

49. [정답] ④

공차를 d 라 하면 첫째항은 10, 제 $(n+2)$ 항은 88이므로

$$10+(n+1)d=88$$

$$\therefore (n+1)d=78 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때, $78=2 \times 3 \times 13$ 이므로 1이 아닌 최소의 자연수인 공차는 2이다.

즉, $d=2$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$n+1=39 \quad \therefore n=38$$

따라서 조건을 만족하는 수열의 항의 개수는 40이므로 합은

$$\frac{40(10+88)}{2} = 1960$$

50. [정답] ④

등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공차를 각각 d , d' 이라 하면

$$a_1+b_1=4, \quad d+d'=2$$

$$\therefore (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{15})+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{15})$$

$$= \frac{15(2a_1+14d)}{2} + \frac{15(2b_1+14d')}{2}$$

$$= \frac{15\{2(a_1+b_1)+14(d+d')\}}{2}$$

$$= \frac{15(2 \cdot 4 + 14 \cdot 2)}{2} = 270$$

다른풀이 수열 $\{a_n\} + \{b_n\}$ 은 첫째항이 4, 공차가 2인 등차수열이므로

$$(주어진 식) = (a_1+b_1) + (a_2+b_2) + \cdots + (a_{15}+b_{15})$$

$$= \frac{15\{2 \cdot 4 + (15-1) \cdot 2\}}{2} = 270$$

51. [정답] -10

$$S_{10} + T_{10} = \frac{10(a_1+a_{10})}{2} + \frac{10(b_1+b_{10})}{2}$$

$$= 5(a_1+a_{10}) + 5(b_1+b_{10})$$

$$= 5\{(a_1+b_1) + (a_{10}+b_{10})\}$$

$$= 5\{(a_1+b_1) + 42\} = 160$$

$$\text{이므로 } (a_1+b_1) + 42 = 32$$

$$\therefore a_1+b_1 = -10$$

52. [정답] ④

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_{10} = \frac{10\{2a+(10-1)d\}}{2} = 140$$

$$\therefore 2a+9d=28 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$S_{20} = \frac{20\{2a+(20-1)d\}}{2} = 480$$

$$\therefore 2a+19d=48 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=5, d=2$

$$\therefore S_{30} = \frac{30\{2 \cdot 5 + (30-1) \cdot 2\}}{2} = 1020$$

53. [정답] ③

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_5 = \frac{5\{2a+(5-1)d\}}{2} = 160$$

$$\therefore a+2d=32 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$S_{15} = \frac{15\{2a+(15-1)d\}}{2} = 630$$

$$\therefore a+7d=42 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=28, d=2$

$$a_6 + a_7 + a_8 + \cdots + a_{40} = S_{40} - S_5$$

$$= \frac{40\{2 \cdot 28 + (40-1) \cdot 2\}}{2} - 160$$

$$= 2680 - 160 = 2520$$

54. [정답] 500

주어진 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_{10} = \frac{10\{2a+(10-1)d\}}{2} = 100$$

$$\therefore 2a+9d=20 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 제 11항부터 제 20항까지의 합이 300이므로

$$S_{20} - S_{10} = 300, \quad \frac{20\{2a+(20-1)d\}}{2} - 100 = 300$$

$$\therefore 2a+19d=40 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=1, d=2$

따라서 제 21항부터 제 30항까지의 합은

$$S_{30} - S_{20} = \frac{30\{2 \cdot 1 + (30-1) \cdot 2\}}{2} - (100+300)$$

$$= 900 - 400 = 500$$

55. [정답] 77

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_5 = a + 4d = 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_{13} = a + 12d = -16 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = 20, d = -3$

$$\therefore a_n = 20 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 23$$

$$-3n + 23 < 0 \text{에서 } n > \frac{23}{3} = 7.\times\times\times$$

즉 수열 $\{a_n\}$ 은 제 8항부터 음수이므로 첫째항부터 제 7항까지의 합이 최대이다.

따라서 $a_7 = -3 \cdot 7 + 23 = 2$ 이므로 구하는 최댓값은

$$S_7 = \frac{7(20+2)}{2} = 77$$

56. [정답] ④

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_{30} = 116 \text{에서 } a + 29d = 116 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_{50} = 56 \text{에서 } a + 49d = 56 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = 203, d = -3$

따라서 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \frac{n\{2 \times 203 + (n-1) \times (-3)\}}{2}$$

$$= -\frac{3}{2}n^2 + \frac{409}{2}n = -\frac{3}{2}\left(n - \frac{409}{6}\right)^2 + \frac{409^2}{24}$$

이때, $\frac{409}{6} = 68.16 \times \times \times$ 이고, n 은 자연수이므로 $n = 68$ 일 때, S_n 은 최댓값을 가진다.

다른풀이 $a_n = 203 + (n-1) \times (-3) = -3n + 206$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 최대가 되려면 a_n 의 값이 음수가 되기 바로 전의 항까지 더하면 되므로

$$-3n + 206 \geq 0 \text{에서 } n \leq 68.66 \times \times \times$$

따라서 첫째항부터 제 68항까지의 합이 최대가 된다.

57. [정답] ④

첫째항이 -30 , 공차가 4이므로

$$\therefore a_n = -30 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 34$$

$$4n - 34 > 0 \text{에서 } n > \frac{34}{4} = 8.5$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 제 9항부터 양수이므로 첫째항부터 제 8항까지의 합이 최소가 된다.

다른풀이 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \frac{n\{2 \cdot (-30) + (n-1) \cdot 4\}}{2}$$

$$= 2n^2 - 32n = 2(n-8)^2 - 128$$

따라서 $n = 8$ 일 때 S_n 이 최소이므로 제 8항까지의 합이 최소가 된다.

58. [정답] 30

주어진 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$\frac{4(2a+3d)}{2} = 24, \quad \frac{10(2a+9d)}{2} = 0$$

$$2a+3d=12, \quad 2a+9d=0$$

$$\therefore a=9, \quad d=-2$$

따라서 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

$$\frac{n\{2 \cdot 9 + (n-1) \cdot (-2)\}}{2} = -n^2 + 10n$$

$$= -(n-5)^2 + 25$$

$$\text{이므로 } p=5, \quad q=25 \quad \therefore p+q=30$$

59. [정답] ④

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$S_3 = \frac{3\{2 \cdot (-4) + 2d\}}{2} = 3d - 12$$

$$S_8 = \frac{8\{2 \cdot (-4) + 7d\}}{2} = 28d - 32$$

$$S_3 = S_8 \text{에서 } 3d - 12 = 28d - 32$$

$$25d = 20 \quad \therefore d = \frac{4}{5}$$

$$\text{따라서 } a_n = -4 + (n-1) \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5}n - \frac{24}{5} \text{이므로}$$

$$\frac{4}{5}n - \frac{24}{5} > 0 \text{에서 } n > 6$$

즉 수열 $\{a_n\}$ 은 제 7항부터 양수이므로 첫째항부터 제 6항까지의 합이 최소이다.

$$\text{따라서 } a_6 = \frac{4}{5} \cdot 6 - \frac{24}{5} = 0 \text{이므로 구하는 최솟값은}$$

$$S_6 = \frac{6(-4+0)}{2} = -12$$

60. [정답] -15

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_n = 112 + (n-1)d$

이때 S_8 의 값이 임의의 S_n 의 값보다 크려면 $a_8 > 0, a_9 < 0$ 이어야 한다.

$$a_8 = 112 + 7d > 0 \text{에서 } d > -16$$

$$a_9 = 112 + 8d < 0 \text{에서 } d < -14$$

$$\therefore -16 < d < -14$$

$$\text{이때 } d \text{는 정수이므로 } d = -15$$

61. [정답] ③

해결단계

① 단계	$S_{14} = S_{28}$ 임을 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
② 단계	등차중항의 성질을 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.
③ 단계	등차수열의 합의 공식을 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $S_{14} = S_{28}$ 에서

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{14}$$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{14}) + (a_{15} + a_{16} + \cdots + a_{28})$$

$$\therefore a_{15} + a_{16} + a_{17} + \cdots + a_{28} = 0 \text{ (참)}$$

ㄴ. 수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로

$$a_{15} + a_{28} = a_{16} + a_{27} = \cdots = a_{19} + a_{24} = \cdots = a_{21} + a_{22}$$

ㄱ에서 $7(a_{19} + a_{24}) = 0$ 이므로

$$a_{19} + a_{24} = 0, \quad a_{19} = -a_{24}$$

$$\therefore |a_{19}| = |a_{24}| \text{ (참)}$$

ㄷ. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 ㄴ에서

$$a_{19} + a_{24} = 0 \text{ 이므로}$$

$$a_1 + 18d + a_1 + 23d = 0, \quad 2a_1 = -41d$$

$$\therefore a_1 = -\frac{41}{2}d$$

이때, $a_1 > 0$ 이므로 $d < 0$ 이고,

$$a_n = -\frac{41}{2}d + (n-1)d = d\left(n - \frac{43}{2}\right)$$

S_n 의 값이 최대가 되려면 합해지는 항이 모두 음수가 아니어야 하므로

$$d\left(n - \frac{43}{2}\right) \geq 0 \quad \therefore n \leq 21.5 (\because d < 0)$$

따라서 $n = 21$ 일 때, S_n 은 최댓값을 갖는다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

62. [정답] ④

100 이하의 자연수 중에서 3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$1, 4, 7, 10, \dots, 97, 100$$

이때 $100 = 1 + 3 \cdot 33$ 에서 구하는 값은 첫째항이 1, 끝항이 100, 항수가 34인 등차수열의 합이므로

$$\frac{34(1+100)}{2} = 1717$$

63. [정답] 1725

50보다 크고 100보다 작은 자연수 중에서 3의 배수는

$$51, 54, 57, \dots, 99 \quad \cdots \textcircled{1}$$

이때 $99 = 51 + 3 \cdot 16$ 이므로 $\textcircled{1}$ 은 첫째항이 51, 끝항이 99, 항수가 17인 등차수열이다.

$$\text{즉 그 합은 } \frac{17(51+99)}{2} = 1725$$

50보다 크고 100보다 작은 자연수 중에서 5의 배수는

$$55, 60, 65, \dots, 95 \quad \cdots \textcircled{2}$$

이때 $95 = 55 + 5 \cdot 8$ 이므로 $\textcircled{2}$ 은 첫째항이 55, 끝항이 95, 항수가 9

인 등차수열이다.

$$\text{즉 그 합은 } \frac{9(55+95)}{2} = 675$$

한편 50보다 크고 100보다 작은 자연수 중에서 15의 배수는

$$60, 75, 90 \quad \cdots \textcircled{3}$$

이므로 $\textcircled{3}$ 의 세수의 합은 $60 + 75 + 90 = 225$

따라서 50보다 크고 100보다 작은 자연수 중에서 3또는 5로 나누어 떨어지는 수의 총합은 $1275 + 675 - 225 = 1725$

64. [정답] 867

두 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 일반형은 각각

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1,$$

$$b_n = 3 + (n-1) \cdot 3 = 3n$$

즉 수열 $\{a_n\}$ 은 2로 나누었을 때의 나머지가 1인 자연수의 수열이고, 수열 $\{b_n\}$ 은 3로 나누었을 때의 나머지가 0인 자연수의 수열이다.

이때, 수열 $\{b_n\}$ 에 포함된 자연수를 N 이라 하면 $N = 3n$ 으로 놓을 수 있으므로 자연수 k 에 대하여

(i) $n = 2k$ 일 때,

$N = 3 \cdot 2k = 2 \cdot 3k$ 이므로 N 은 2로 나누었을 때의 나머지가 0인 자연수이다.

(ii) $n = 2k - 1$ 일 때,

$N = 3(2k - 1) = 2(3k - 2) + 1$ 이므로 N 은 2로 나누었을 때의 나머지가 1인 자연수이다.

(i), (ii) 중에서 수열 $\{a_n\}$ 에 포함될 수 있는 자연수 N 은

$$N = 2(3k - 2) + 1 = 6k - 3$$

이므로 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 공통으로 들어 있는 수는

$$3, 9, 15, \dots, 99$$

따라서 구하는 값은 첫째항이 3, 끝항이 99, 항수가 17인 등차수열의 합이므로

$$\frac{17(3+99)}{2} = 867$$

참고 2로 나누었을 때의 나머지가 1이면서 3으로 나누었을 때의 나머지가 0인 수는 6으로 나누었을 때의 나머지가 3인 수이다.

65. [정답] ④

연속하는 20개의 자연수 중에서 가장 작은 수를 a 라 하면 20개의 자연수는 첫째항이 a , 공차가 1인 등차수열을 이루므로

$$\frac{20\{2a + (20-1) \cdot 1\}}{2} = 530, \quad 2a + 19 = 53$$

$$2a = 34 \quad \therefore a = 17$$

따라서 구하는 가장 큰 수는 $17 + 19 = 36$

66. [정답] 3

n 각형의 내각의 크기의 합은

$$180^\circ \times (n-2) = 180^\circ \times n - 360^\circ$$

첫째항이 40° , 공차가 20° , 항수가 n 인 등차수열의 합은

$$\frac{n\{2 \times 40^\circ + (n-1) \times 20^\circ\}}{2} = 10^\circ \times n^2 + 30^\circ \times n$$

따라서 $10^\circ \times n^2 + 30^\circ \times n = 180^\circ \times n - 360^\circ$ 이므로

$$n^2 - 15n + 36 = 0, (n-3)(n-12) = 0$$

$$\therefore n=3 \text{ 또는 } n=12$$

이때 $n=12$ 이면 최대각의 크기가 $40^\circ + 11 \times 20^\circ = 260^\circ$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$\therefore n=3$$

67. [정답] ⑤

오른쪽 그림에서 색칠한 직각삼각형은 모두 합동이므로

$$\begin{aligned} \overline{P_2Q_2} - \overline{P_1Q_1} \\ &= \overline{P_3Q_3} - \overline{P_2Q_2} \\ &\vdots \\ &= \overline{P_{10}Q_{10}} - \overline{P_9Q_9} \end{aligned}$$

즉 $\overline{P_1Q_1}, \overline{P_2Q_2}, \dots, \overline{P_{10}Q_{10}}$ 의 길이는 이 순서대로 등차수열을 이루므로 이 수열의 공차를 d 라 하면

$$\overline{P_2Q_2} = 6 + d, \overline{P_9Q_9} = 10 - d$$

$$\overline{P_2Q_2} + \overline{P_3Q_3} + \overline{P_4Q_4} + \dots + \overline{P_9Q_9} = \frac{8\{(6+d) + (10-d)\}}{2} = 64$$

다른풀이

$\overline{P_1Q_1}, \overline{P_2Q_2}, \dots, \overline{P_{10}Q_{10}}$ 의 길이는 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$\begin{aligned} \overline{P_1Q_1} + \overline{P_2Q_2} + \overline{P_3Q_3} + \dots + \overline{P_9Q_9} + \overline{P_{10}Q_{10}} \\ &= \frac{10(6+10)}{2} = 80 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{P_2Q_2} + \overline{P_3Q_3} + \overline{P_4Q_4} + \dots + \overline{P_9Q_9} &= 80 - (\overline{P_1Q_1} + \overline{P_{10}Q_{10}}) \\ &= 80 - (6+10) = 64 \end{aligned}$$

68. [정답] 315

[출제의도] 등차수열의 합을 이용하여 선분의 길이의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

x 좌표가 t 인 점에서 선분의 길이를 $f(t)$ 라 하면

선분의 길이는 두 직선의 y 의 값의 차이므로

$$f(t) = a(t-1) - t = at - a - t = (a-1)t - a$$

그러므로 주어진 14 개의 선분의 길이는 등차수열을 이룬다. 따라서 구하는 선분의 길이의 합은

$$\frac{14(3+42)}{2} = 315$$

참고

일차함수 $f(x) = ax + b$ 에서 x 의 값들이 등차수열을 이루면 $f(x)$ 의 값들도 등차수열을 이룬다.

69. [정답] ④

[출제의도] 수열의 합을 이용하여 일반항 구하기

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$= 2n^2 + 3n - \{2(n-1)^2 + 3(n-1)\}$$

$$= 4n + 1$$

$$a_1 = S_1 \text{ 이므로 } a_n = 4n + 1 \quad (n \geq 1)$$

70. [정답] ①

$$S_n = 2n^2 + 12n \text{ 에서}$$

$$a_4 = S_4 - S_3$$

$$= (2 \cdot 4^2 + 12 \cdot 4) - (2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3) = 26$$

$$a_8 = S_8 - S_7$$

$$= (2 \cdot 8^2 + 12 \cdot 8) - (2 \cdot 7^2 + 12 \cdot 7) = 42$$

$$\therefore a_4 + a_8 = 26 + 42 = 68$$

다른풀이

$$S_n = 2n^2 + 12n \text{ 에서}$$

(i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 = 14$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= 2n^2 + 12n - \{2(n-1)^2 + 12(n-1)\}$$

$$= 4n + 10 \quad \dots\dots\dots \textcircled{7}$$

이때, $a_1 = 14$ 는 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 4n + 10$$

$$\therefore a_4 + a_8 = 26 + 42 = 68$$

71. [정답] ⑤

$$S_n = 2n^2 - 3n \text{ 에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (2n^2 - 3n) - \{2(n-1)^2 - 3(n-1)\}$$

$$= 4n - 5$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2 - 3 = -1$$

(i), (ii) 에서 $a_n = 4n - 5 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

이때, $a_k = 43$ 이므로 $4k - 5 = 43$ 에서

$$4k = 48 \quad \therefore k = 12$$

72. [정답] ③

$$S_n = n^2 - 6n \text{ 에서}$$

(i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 6 \cdot 1 = -5$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= n^2 - 6n - \{(n-1)^2 - 6(n-1)\}$$

$$= 2n - 7 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

이때, $a_1 = -5$ 는 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 2n - 7$$

$$1 \leq a_n \leq 40 \text{에서 } 1 \leq 2n - 7 \leq 40$$

$$8 \leq 2n \leq 47 \quad \therefore 4 \leq n \leq 23.5$$

따라서 자연수 n 은 4, 5, ..., 23의 20개다.

73. [정답] 5050

$$S_n = n^2 + 2n \text{에서}$$

(i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + 2n - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\} \\ &= 2n + 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이때, $a_1 = 3$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 2n + 1$$

따라서 $a_1 = 3, a_3 = 7, a_5 = 11, \dots, a_{99} = 199$ 이므로

$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{99}$ 는 첫째항이 3, 끝항이 199, 항수가 50인 등차수열의 합과 같다.

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{99} = \frac{50(3+199)}{2} = 5050$$

74. [정답] (1) $a_n = 2n + 1$ (2) 132

$$(1) a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n} = 2n^2 + 3n \text{에서}$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n-2} = 2(n-1)^2 + 3(n-1) \text{이므로}$$

$$a_{2n} = 2n^2 + 3n - \{2(n-1)^2 + 3(n-1)\} = 4n + 1$$

$$n \text{ 대신에 } \frac{n}{2} \text{ 을 대입하면 } a_{2 \times \frac{1}{2}n} = 4 \times \frac{n}{2} + 1 \text{에서}$$

$$a_n = 2n + 1$$

(2) (1)에서 수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로 수열 $\{a_{3n}\}$ 도 등차수열이고,

$$a_3 = 2 \times 3 + 1 = 7, a_{18} = 2 \times 18 + 1 = 37 \text{이므로}$$

$$a_3 + a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} + a_{18} = \frac{6(7+37)}{2} = 132$$

다른풀이

(1) 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_n = a + (n-1)d \text{에서}$$

$$a_{2n} = a + (2n-1)d = a + d + (n-1) \times 2d$$

즉, 수열 $\{a_{2n}\}$ 은 첫째항이 $a+d$, 공차가 $2d$ 인 등차수열이므로

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n} = \frac{n\{2(a+d) + (n-1) \times 2d\}}{2} \sim$$

$$= an + dn^2 = 2n^2 + 3n$$

위의 식은 n 에 대한 항등식이므로 $a=3, d=2$

$$\therefore a_n = 3 + (n-1) \times 2 = 2n + 1$$

특강 필수원리

수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 d 일 때,

$$(\text{수열 } \{a_{kn}\} \text{의 공차}) = (\text{수열 } \{ka_n\} \text{의 공차}) = kd$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이면 수열 $\{a_{kn}\}$ (k 는 자연수)도 등차수열이다.

75. [정답] 16

$$S_n = n^2 + kn + 2, S'_n = 2n^2 - 3n \text{이라 하면}$$

$$a_{10} = S_{10} - S_9 = (10^2 + 10k + 2) - (9^2 + 9k + 2) = 19 + k$$

$$b_{10} = S'_{10} - S'_9 = (2 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10) - (2 \cdot 9^2 - 3 \cdot 9) = 35$$

이때, $a_{10} = b_{10}$ 이므로

$$19 + k = 35 \quad \therefore k = 16$$

76. [정답] ①

$$S_n = an^2 + 2n + b \text{에서}$$

$$a_1 = S_1 = a \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + b = 0$$

$$\therefore a + b = -2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } a_7 = S_7 - S_6 = 28$$

$$(49a + 14 + b) - (36a + 12 + b) = 28$$

$$13a + 2 = 28 \quad \therefore a = 2$$

$a = 2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b = -4$

$$\therefore ab = 2 \cdot (-4) = -8$$

77. [정답] 187

① 단계	S_n 으로부터 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 을 구한다.
② 단계	T_n 으로부터 수열 $\{a_n^+ b_n^+\}$ 의 일반항 $a_n^+ b_n^+$ 을 구한다.
③ 단계	①, ② 단계의 결과를 이용하여 수열 $\{a_n + b_n\}$ 의 첫째 항부터 제 10 항까지의 합을 구한다.

$$S_n = n^2 + 1 \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 + 1) - \{(n-1)^2 + 1\} = 2n - 1 \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 1 = 2$$

$$T_n = \frac{n(4n^2 + 21n - 1)}{6} + 6 \text{에서}$$

(iii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n^+ b_n^+ &= T_n - T_{n-1} \\ &= \left\{ \frac{n(4n^2 + 21n - 1)}{6} + 6 \right\} \end{aligned}$$

$$-\left[\frac{(n-1)\{4(n-1)^2+21(n-1)-1\}}{6}+6\right]$$

$$=\frac{12n^2+30n-18}{6}$$

$$=2n^2+5n-3=(2n-1)(n+3)$$

(iv) $n=1$ 일 때,

$$a_1b_1=T_1=\frac{4+21-1}{6}+6=4+6=10$$

(i) ~ (iv)에서

$$a_1=2, a_n=2n-1 (n=2, 3, 4, \dots),$$

$$b_1=5, b_n=n+3 (n=2, 3, 4, \dots)$$

따라서 수열 $\{a_n+b_n\}$ 의 첫째항부터 제 10 항까지의 합은

$$(2+3+5+\dots+19)+(5+5+6+\dots+13)$$

$$=2+\frac{9(3+19)}{2}+5+\frac{9(5+13)}{2}$$

$$=2+99+5+81=187$$

78. [정답] ③

$$\neg. a_n=n \text{ 이면 } S_n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$T_n=\frac{n^2(n^2-1)}{S_n}=2n(n-1)=2n^2-2n$$

$$b_n=T_n-T_{n-1}$$

$$=2n^2-2n-\{2(n-1)^2+2(n-1)\}$$

$$=4n-4 \quad \therefore \text{참}$$

ㄴ. 수열 a_n 의 첫째항을 a_1 , 수열 b_n 의 첫째항을 b_1 라 하면

$$S_n=\frac{n\{2a_1+(n-1)d_1\}}{2},$$

$$T_n=\frac{n\{2b_1+(n-1)d_2\}}{2}$$

$S_nT_n=n^2(n^2-1)$ 에서 n^4 의 계수를 비교하면

$$\frac{d_1}{2} \times \frac{d_2}{2} = 1 \quad \therefore d_1d_2=4 \quad \therefore \text{참}$$

ㄷ. $a_n=2n$ 이면 $a_1=2 \neq 0$ 이다.

$$S_n=n(n+1) \text{ 이므로 } T_n=n(n-1)=n^2-n$$

$$b_n=T_n-T_{n-1}=2n-2 \text{가 돼서 } b_n \text{이 존재한다.}$$

즉, $a_n \neq n$ 이면서 $a_1 \neq 0$ 이고 주어진 조건을 만족하는 a_n 이 존재한다. $\therefore$ 거짓

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

79. [정답] 16

수열 $\{S_{2n-1}\}$ 이 공차가 -3 인 등차수열이므로

$$S_{2n-1}=S_1+(n-1) \times (-3)=-3n+3+S_1$$

또, 수열 $\{S_{2n}\}$ 이 공차가 2 인 등차수열이므로

$$S_{2n}=S_2+(n-1) \times 2=2n-2+S_2$$

$$a_8=S_8-S_7=(6+S_2)-(-9+S_1)=15+S_2-S_1 \text{ 이고}$$

$$S_2-S_1=a_2=1 \text{ 이므로}$$

$$a_8=16$$

80. [정답] ②

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_5:a_7=1:4 \text{에서 } 4a_5=a_7 \text{ 이므로}$$

$$4ar^4=ar^6, 4=r^2 (\because a>0, r>0)$$

$$\therefore r=2 (\because r>0)$$

또한, $a_2+a_3=6$ 에서 $ar+ar^2=6$

$$ar(1+r)=6$$

$r=2$ 를 위의 식에 대입하면 $6a=6 \quad \therefore a=1$

$$\therefore a_{10}=ar^9=1 \times 2^9=2^9$$

81. [정답] 4

$$a_n=ar^{n-1} \text{이므로 } a_3=ar^2=2 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_6:a_9=1:8 \text{에서 } ar^5:ar^8=1:8, 8ar^5=ar^8$$

$$r^3=8, \quad \therefore r=2$$

$$r=2 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } a \cdot 2^2=2 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{r}{a}=4$$

82. [정답] 108

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_7=12 \text{에서 } ar^6=12 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{a_6a_{10}}{a_5}=36 \text{에서 } \frac{ar^5 \times ar^9}{ar^4}=ar^{10}=36 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r^4=3$$

$$\therefore a_{15}=ar^{14}=ar^{10} \times r^4=36 \times 3 (\because \textcircled{2})$$

$$=108$$

단계	채점 기준	배점
㉑	$a_7=12, \frac{a_6a_{10}}{a_5}=36$ 에서 r^4 의 값을 구한 경우	60%
㉒	36과 r^4 의 값을 이용하여 a_{15} 의 값을 구한 경우	40%

83. [정답] ②

[출제의도] 등비수열의 일반항 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$\frac{a_5}{a_2}=2 \text{에서 } \frac{ar^4}{ar}=r^3=2$$

$$a_4+a_7=12 \text{에서}$$

$$a_4+a_7=ar^3(1+r^3)=12 \text{이므로 } a=2$$

$$\text{따라서 } a_{13}=ar^{12}=32$$

84. [정답] ③

$$a_1 + a_2 = a(1+r) = 12 \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{a_3 + a_7}{a_1 + a_5} = \frac{r^2(a_1 + a_5)}{a_1 + a_5} = r^2 = 4 \quad \therefore r = 2 \quad (\because r > 0)$$

①에서 $a = 4$

$$\therefore a_4 = ar^3 = 4 \cdot 2^3 = 32$$

85. [정답] ③

공비를 r 라 하면 $r > 1$ 이고, $a = r$, $b = r^2$, $c = r^3$

$b^3 = 27ac$ 에서

$$(r^2)^3 = 27 \cdot r \cdot r^3, \quad r^6 = 3^3 \cdot r^4, \quad \therefore r = 3\sqrt{3}$$

$$\therefore a = r = 3\sqrt{3}$$

86. [정답] 36

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면 $a_1 + a_2 + a_3 = 6$ 에서

$$a_1 + a_1r + a_1r^2 = 6, \quad \therefore a_1(1+r+r^2) = 6 \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 $a_4 + a_5 + a_6 = 48$ 에서 $a_1r^3 + a_1r^4 + a_1r^5 = 48$

$$\therefore a_1r^3(1+r+r^2) = 48 \cdots \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r^3 = 8 \quad \therefore r = 2$$

$$r = 2 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } a_1 \cdot 7 = 6 \quad \therefore a_1 = \frac{6}{7}$$

$$\therefore a_2 + a_4 + a_6 = a_1 + a_1r^3 + a_1r^5 = a_1r(1+r^2+r^4)$$

$$= \frac{6}{7} \cdot 2 \cdot 21 = 36$$

87. [정답] ①

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_2 = ar = 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_4 = ar^3 = 10^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r^2 = 10 \quad \therefore r = \sqrt{10} \quad (\because r > 0)$$

$$r = \sqrt{10} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } a = \sqrt{10}$$

따라서 $a_n = (\sqrt{10})^n$ 이므로 $a_{2n} = 10^n$

$$a_2a_4a_6 \cdots a_{20} = 10^{1+2+3+\cdots+10} = 10^{55}$$

88. [정답] ①

[출제외도] 등비수열의 일반항과 지수법칙을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

케이크의 제 1단의 부피를 a 라 하고 각 단의 부피가 r 배씩 감소한 다고 하면

$$p = ar, \quad q = ar^3 \text{이므로 } \frac{q}{p} = r^2 \quad \therefore r = \sqrt{\frac{q}{p}}$$

따라서 케이크의 제 8단의 부피는

$$ar^7 = ar^3 \cdot r^4 = q \left(\sqrt{\frac{q}{p}} \right)^4 = \frac{q^3}{p^2}$$

89. [정답] ⑤

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$\frac{a_{11}}{a_1} + \frac{a_{12}}{a_2} + \frac{a_{13}}{a_3} + \frac{a_{14}}{a_4} + \frac{a_{15}}{a_5}$$

$$= \frac{a_1r^{10}}{a_1} + \frac{a_1r^{11}}{a_1r} + \frac{a_1r^{12}}{a_1r^2} + \frac{a_1r^{13}}{a_1r^3} + \frac{a_1r^{14}}{a_1r^4}$$

$$= r^{10} + r^{10} + r^{10} + r^{10} + r^{10} = 5r^{10} = 20$$

$$\therefore r^{10} = 4$$

$$\therefore \frac{a_{40}}{a_{20}} = \frac{a_1r^{39}}{a_1r^{19}} = r^{20} = (r^{10})^2 = 4^2 = 16$$

90. [정답] 27

$a_n = a \cdot 3^{n-1}$ 에서

$$a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$$

$$= a \cdot 3^1 + a \cdot 3^3 + a \cdot 3^5 + a \cdot 3^7 + a \cdot 3^9$$

$$= a \cdot 3(1+3^2+3^4+3^6+3^8)$$

한편,

$$a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} + a_{13}$$

$$= a \cdot 3^4 + a \cdot 3^6 + a \cdot 3^8 + a \cdot 3^{10} + a \cdot 3^{12}$$

$$= a \cdot 3^4(1+3^2+3^4+3^6+3^8)$$

$$\therefore \frac{a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} + a_{13}}{a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}} = \frac{a \cdot 3^4(1+3^2+3^4+3^6+3^8)}{a \cdot 3(1+3^2+3^4+3^6+3^8)}$$

$$= 3^3 = 27$$

91. [정답] ④

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 $r(r \neq 1)$ 라 하면 일반항 a_n 은

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$\neg. \frac{n}{a_n} = \frac{n}{ar^{n-1}} \text{이므로 } \frac{\frac{n+1}{a_{n+1}}}{\frac{n}{a_n}} = \frac{\frac{n+1}{ar^n}}{\frac{n}{ar^{n-1}}} = \frac{n+1}{nr}$$

그런데 $\frac{n+1}{nr}$ 은 상수가 아니므로 수열 $\left\{ \frac{n}{a_n} \right\}$ 은 등비수열이 아니다.

$$\neg. a_{n+1} + a_n = ar^n + ar^{n-1} = (ar+a)r^{n-1} \text{이므로 수열}$$

$\{a_{n+1} + a_n\}$ 은 첫째항이 $ar+a$, 공비가 r 인 등비수열이다.

$$\neg. a_n^2 = (ar^{n-1})^2 = a^2(r^2)^{n-1} \text{이므로 수열 } \{a_n^2\} \text{은 첫째항이 } a^2, \text{ 공}$$

비가 r^2 인 등비수열이다.

따라서 등비수열인 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

92. [정답] $\neg$

① 단계	등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공비를 각각 a, r 라 하고 $a_{n+1} - a_n$ 을 구하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
② 단계	반례를 찾아 ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 일반항

$$a_n = ar^{n-1} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= ar^n - ar^{n-1} = ar \times r^{n-1} - ar^{n-1} \\ &= a(r-1)r^{n-1} \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 은 첫째항이 $a(r-1)$, 공비가 r 인 등비수열이다. (참)

ㄴ. (반례) 수열 $\{a_n\}$ 이 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, ... 이면 수열 $\{a_{n+1} + a_n\}$ 은 2, 3, 4, 5, 6, ... 으로 등차수열이지만 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이 아니다. (거짓)

ㄷ. (반례) 수열 $\{a_n\}$ 이 1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, ... 이면 수열 $\{a_n a_{n+1}\}$ 은 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... 로 등비수열이지만 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$

은 1, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$, ... 로 등비수열이 아니다. (거짓)
그러므로 옳은 것은 ㄱ이다.

93. [정답] 48

[출제의도] 등비수열의 일반항과 지수법칙을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_1 a_2 = 6 \text{에서 } a^2 r = 6 \dots \textcircled{1}$$

$$a_3 a_4 = 12 \text{에서 } a^2 r^5 = 12 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } r^4 = 2$$

$$\therefore a_7 a_8 = ar^6 \cdot ar^7 = a^2 r^{13} = a^2 r^5 \cdot (r^4)^2$$

$$= 12 \times 2^2 = 48$$

94. [정답] ④

[출제의도] 등비수열의 일반항을 알고 있는가를 묻는 문제이다.

$c_n = a_n b_n$ 이라 하면 수열 $\{c_n\}$ 도 등비수열이다.

$c_n = ar^{n-1}$ 이라 하면

$$ar^3 = 3 \dots \textcircled{1}, ar^6 = 6 \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 계산하면

$$r^3 = 2$$

$$\therefore a_{16} b_{16} = c_{16} = ar^{15} = ar^3 (r^3)^4 = 48$$

95. [정답] ②

$$a_n = a_1 \cdot 2^{n-1}, a_{n+1} = a_1 \cdot 2^n$$

$$3a_{n+1} - a_n = 3a_1 \cdot 2^n - a_1 \cdot 2^{n-1}$$

$$= 2^{n-1} \cdot a_1 (6-1)$$

$$= 5a_1 \cdot 2^{n-1}$$

$\therefore$ 공비는 2

96. [정답] ①

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$\therefore a_n + 2a_{n+1} = ar^{n-1} + 2ar^n$$

$$= (a + 2ar)r^{n-1}$$

즉, 수열 $\{a_n + 2a_{n+1}\}$ 은 첫째항이 $a + 2ar$, 공비가 r 이므로

$$a + 2ar = 9, r = \frac{1}{4}$$

$$r = \frac{1}{4} \text{을 } a + 2ar = 9 \text{에 대입하면}$$

$$a + \frac{1}{2}a = 9, \frac{3}{2}a = 9 \quad \therefore a = 6$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항은 6이다.

97. [정답] 78

공비를 r ($r > 0$)라 하면 첫째항이 2, 제 5항이 162이므로

$$2r^4 = 162, r^4 = 81$$

$$\therefore r = 3 (\because r > 0)$$

따라서 $a = 6, b = 18, c = 54$ 이므로

$$a + b + c = 78$$

98. [정답] ④

공비를 r 라 하면 첫째항이 54, 제 6항이 $\frac{64}{9}$ 이므로

$$54 \cdot r^5 = \frac{64}{9}, r^5 = \frac{32}{243} \quad \therefore r = \frac{2}{3}$$

따라서 $a_3 = 54 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 16$ 이므로

$$\sqrt{a_3} = \sqrt{16} = 4$$

99. 정답 120

[출제의도] 등비수열의 합을 이용하여 등식을 만족시키는 조건을 구한다.

주어진 등비수열의 일반항을 b_n , 공비를 r 라 하면 $b_1 = 3$ 이므로

$b_n = 3r^{n-1}$ 이고, 수열 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{3}$, 공비가 $\frac{1}{r}$ 인 등비수열이다.

$$3 + a_1 + a_2 + \dots + a_{10} + 40 = \frac{3(r^{12} - 1)}{r - 1}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{10}} + \frac{1}{40}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{r} \right)^{12} \right\}}{1 - \frac{1}{r}}$$

$$= \frac{r(r^{12}-1)}{3r^{12}(r-1)}$$

$$3+a_1+a_2+\cdots+a_{10}+40=k\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{10}}+\frac{1}{40}\right)$$

$$\frac{3(r^{12}-1)}{r-1} = \frac{kr(r^{12}-1)}{3r^{12}(r-1)}$$

$$\therefore k=9r^{11}$$

$$b_{12}=3r^{11}=40 \text{ 이므로}$$

$$k=9r^{11}=3 \cdot 3r^{11}=3 \times 40=120$$

100. [정답] 64

등비수열의 첫항을 a , 공비를 r 이라 하면, $a > 0$, $r > 0$ 이므로

$$+ a_2a_4 = ar \times ar^3 = a^2r^4 = 16 \text{ 이므로 } ar^2 = 4 \quad \cdots (1)$$

$$+ a_3a_5 = ar^2ar^4 = a^2r^6 = 64 \text{ 이므로 } ar^3 = 8 \quad \cdots (2)$$

(1), (2)를 연립하면 $a=1$, $r=2$

$$\therefore a_7 = ar^6 = 2^6 = 64$$

101. [정답] ①

출제의도 : 등비수열의 일반항을 구할 수 있는가?

$$a_1a_5 = 9 \text{ 에서 } a_3^2 = 9 \text{ 이므로}$$

$$a_3 = 3 \quad (\because a_3 > 0)$$

$$\text{또, } a_2a_6 = 36 \text{ 에서 } a_4^2 = 36$$

$$a_4 = 6 \quad (\because a_4 > 0)$$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$r = \frac{a_4}{a_3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$a_3 = a_1 \times 2^2 = 3 \text{ 에서}$$

$$a_1 = \frac{3}{4}$$

$$\therefore 8(a_1a_2 + a_3a_4) = 8a_1^2(r+r^2 \times r^3)$$

$$= 8 \times \frac{9}{16} \times (2+2^2 \times 2^3)$$

$$= \frac{9}{2} \times 34 = 153$$

다른풀이

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$a_1a_5 = a_1 \times a_1r^4$$

$$= a_1^2r^4 = 9 \cdots \textcircled{1}$$

$$a_2a_6 = a_1r \times a_1r^5$$

$$= a_1^2r^6 = 36 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{ 에서 } r^2 = 4$$

$$\therefore r = 2 \quad (\because r > 0)$$

$$\textcircled{1} \text{ 에서 } a_1^2 = \frac{9}{16}$$

$$\therefore 8(a_1a_2 + a_3a_4) = 8a_1^2(r+r^2 \times r^3)$$

$$= 8 \times \frac{9}{16} \times (2+2^2 \times 2^3)$$

$$= \frac{9}{2} \times 34 = 153$$

102. [정답] ①

[출제의도] 등비수열 - 등비수열을 이룰 조건

등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 $a_n = ar^{n-1}$ 이라 하면

$$a_1a_9 = a \cdot ar^8 = (ar^4)^2 = a_5^2 = 4 \text{ 이고}$$

$$a_2a_8 = a_4a_6 = a_5^2 \text{ 이다.}$$

$$\therefore (\text{준식}) = 8$$

103. [정답] ②

[출제의도] 등비수열의 첫째항 구하기

등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 + a_2 = \frac{5}{8} \text{ 에서, } a_1 + a_1r = \frac{5}{8}$$

$$a_1a_2a_3 = \frac{1}{8} \text{ 에서 } (a_1r)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\text{즉 } a_2 = a_1r = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a_1 = \frac{5}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

104. [정답] ④

먼저, 주어진 수열이 등비수열이므로,

$$a_n = ar^{n-1} \text{ 이라 놓고,}$$

$$\text{그러면, } a_3 = ar^2 = \sqrt{5}$$

$$a_1 \times a_2 \times a_4 \times a_8 = a^4r^8 = (ar^2)^4$$

$$= (\sqrt{5})^4 = 5^2 = 25$$

105. [정답] ⑤

[출제의도] 등비수열 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_5 \times a_6 = ar^4 \times ar^5 = a^2r^9 = 2$$

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_{10} = a \times ar \times ar^2 \times \cdots \times ar^9$$

$$= a^{10}r^{45} = (a^2r^9)^5 = 2^5 = 32$$

다른풀이 등비수열 $\{a_n\}$ 에서

$$a_1 \times a_{10} = a_2 \times a_9 = \cdots = a_5 \times a_6 = 2$$

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_{10} = (a_5 \times a_6)^5 = 2^5 = 32$$

106. [정답] ①

[출제의도] 등비수열의 일반항을 이해하여 식의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_1 a_{10} = a^2 r^9 = 9 \text{에서}$$

$$a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_{10} = a^{10} \times r^{45} = (a^2 r^9)^5 = 9^5 = 3^{10}$$

107. [정답] 15

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_2 = a + d, a_4 = a + 3d, a_9 = a + 8d \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이고, 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(a + 3d)^2 = (a + d)(a + 8d)$$

$$a^2 + 6ad + 9d^2 = a^2 + 9ad + 8d^2$$

$$d^2 - 3ad = 0, d(d - 3a) = 0$$

$$\therefore d = 3a (\because d \neq 0)$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 각각 대입하여 정리하면

$$a_2 = 4a, a_4 = 10a, a_9 = 25a$$

$$\therefore r = \frac{a_4}{a_2} = \frac{10a}{4a} = \frac{5}{2}$$

$$\therefore 6r = 6 \times \frac{5}{2} = 15$$

108. [정답] 432

세 수 $a^n, 2^8 \times 3^6, b^n$ 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$a^n b^n = (2^8 \times 3^6)^2$$

이때, n 이 자연수이므로 $(ab)^n = (2^4 \times 3^3)^4$ 에서 n 은 4의 약수이고, $n=4$ 일 때 ab 의 값은 최소가 된다.

따라서 구하는 최솟값은

$$2^4 \times 3^3 = 16 \times 27 = 432$$

109. [정답] 25

이차방정식 $x^2 - kx + 125 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = k, \alpha\beta = 125 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때, $\alpha, \beta - \alpha, \beta$ 가 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(\beta - \alpha)^2 = \alpha\beta, (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \alpha\beta$$

$$\therefore (\alpha + \beta)^2 = 5\alpha\beta \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $k^2 = 5 \times 125 = 625$

$$\therefore k = 25 (\because k > 0)$$

110. [정답] ④

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1인 등비수열이므로 공비를 r 라 하면

$$\frac{a_7}{a_2} + \frac{a_8}{a_3} + \frac{a_9}{a_4} + \frac{a_{10}}{a_5} = 20 \text{에서}$$

$$\frac{r^6}{r} + \frac{r^7}{r^2} + \frac{r^8}{r^3} + \frac{r^9}{r^4} = 20, r^5 + r^5 + r^5 + r^5 = 20$$

$$4r^5 = 20 \therefore r^5 = 5$$

$$\therefore a_{11} = 1 \cdot r^{10} = (r^5)^2 = 5^2 = 25$$

111. [정답] 17

다항식 $f(x) = x^2 + 2x + a$ 를 일차식 $x+1, x-1, x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 각각

$$R_1 = f(-1) = a - 1, R_2 = f(1) = a + 3, R_3 = f(2) = a + 8$$

따라서 $a-1, a+3, a+8$ 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(a+3)^2 = (a-1)(a+8)$$

$$a^2 + 6a + 9 = a^2 + 7a - 8 \therefore a = 17$$

112. [정답] 12

2, a, b 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$a^2 = 2b \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$a, b, 12$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2b = a + 12 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$a^2 = a + 12, a^2 - a - 12 = 0$$

$$(a+3)(a-4) = 0, \therefore a = 4 (\because a > 0)$$

$a = 4$ 를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $16 = 2b \therefore b = 8$

$$\therefore a + b = 4 + 8 = 12$$

113. [정답] 43

20, $x-9, y+3$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2(x-9) = 20 + (y+3) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$x-9, y+3, 2$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(y+3)^2 = 2(x-9) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $(y+3)^2 = 20 + (y+3)$

$$y^2 + 5y - 14 = 0, (y+7)(y-2) = 0$$

$$\therefore y = 2 (\because y > 0)$$

$y = 2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $x = \frac{43}{2}$

$$\therefore xy = \frac{43}{2} \cdot 2 = 43$$

114. [정답] 5

① 단계	조건 (가)에서 a, d, e 의 관계를 구한다.
② 단계	조건 (나)와 조건 (가)의 결과를 이용하여 a, b, d, e 의 관계를 구한다.
③ 단계	조건 (다)에서 c 가 몇 번째 항인지 구하여 자연수 n 의 값을 구한다.

조건 (가)에서 $d = \sqrt{ae}$ 이므로 이 식의 양변을 제곱하면 $d^2 = ae$ 이다.

즉, d 는 a 와 e 의 등비중항이므로 a, d, e 또는 e, d, a 는 이 순서로 등비수열을 이룬다.

또한, 조건 (나)에서 $a = kd$, $b = \frac{e}{k}$ 이므로 $k = \frac{a}{d} = \frac{e}{b}$,

즉 $ab = de$ 이다.

따라서 a, d, e, b 또는 b, e, d, a 는 이 순서로 등비수열을 이룬다.
조건 (다)에서 $a < c$ 이므로 a, d, e, b, c 또는 b, e, d, a, c 는 이 순서로 등비수열을 이루고 이 때의 c 는 제 5 항이다.

$$\therefore n = 5$$

115. [정답] 25

① 단계	3, 1, 4와 최소공배수를 이용하여 b, c 의 값을 구한다.
② 단계	최대공약수를 이용하여 e, f 의 관계식을 찾는다.
③ 단계	등비중항을 이용하여 e, f 의 값을 구한 후, $e + f$ 의 값을 구한다.

[그림 2]에서 b 는 3과 1의 최소공배수이므로 3이고, c 는 1과 4의 최소공배수이므로 4이다.

이때, e 와 12의 최대공약수가 3($=b$)이므로 $e = 3k$ (k 는 자연수)라 하면 k 는 4와 서로소이고, f 와 12의 최대공약수가 4($=c$)이므로 $f = 4l$ (l 은 자연수)이라 하면 l 은 3과 서로소이다.

한편, $e, 12, f$ 가 이 순서로 등비수열을 이루므로

$$12^2 = ef \text{에서 } 144 = 3k \times 4l = 12kl \quad \therefore kl = 12$$

k, l 은 각각 4, 3과 서로소인 자연수이므로

$$k = 3, l = 4 \quad \therefore e = 3 \times 3 = 9, f = 4 \times 4 = 16$$

$$\therefore e + f = 9 + 16 = 25$$

116. [정답] ③

$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 이 이 순서대로 조화수열을 이루므로

a, b, c 가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

$$\therefore 2b = a + c \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

b, a, c 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$a^2 = bc \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

또 세 수의 곱이 27이므로 $abc = 27 \quad \dots\dots \textcircled{3}$

$$\textcircled{2} \text{을 } \textcircled{3} \text{에 대입하면 } a^3 = 27 \quad \therefore a = 3$$

$$a = 3 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 2b = 3 + c, \text{ 즉 } c = 2b - 3$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$9 = b(2b - 3), 2b^2 - 3b - 9 = 0$$

$$(2b + 3)(b - 3) = 0 \quad \therefore b = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } b = 3$$

그런데 $a \neq b$ 이므로 $b = -\frac{3}{2}, c = -6$

$$\therefore a + 2b + 3c = 3 + 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 3 \cdot (-6) = -18$$

117. [정답] ⑤

세 실수를 a, ar, ar^2 으로 놓으면

$$a + ar + ar^2 = 7 \quad \therefore a(1 + r + r^2) = 7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a \cdot ar \cdot ar^2 = 8 \quad \therefore (ar)^3 = 8 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } ar = 2 \quad \therefore a = \frac{2}{r}$$

$$a = \frac{2}{r} \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } \frac{2}{r}(1 + r + r^2) = 7$$

양변에 r 를 곱하여 정리하면

$$2r^2 - 5r + 2 = 0, \quad (2r - 1)(r - 2) = 0$$

$$\therefore r = \frac{1}{2} \text{ 또는 } r = 2$$

$$r = \frac{1}{2} \text{일 때 } a = 4, r = 2 \text{일 때, } a = 1 \text{이므로}$$

세 실수는 1, 2, 4이다. 따라서 가장 큰 수는 4이다.

118. [정답] 26

삼차방정식의 세 실근을 a, ar, ar^2 으로 놓으면
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + ar + ar^2 = p$$

$$a \cdot ar + ar \cdot ar^2 + ar^2 \cdot a = 156 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a \cdot ar \cdot ar^2 = 216 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } (ar)^3 = 216 \quad \therefore ar = 6$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } ar(a + ar + ar^2) = 156 \text{이므로}$$

$$6p = 156 \quad \therefore p = 26$$

119. [정답] ③

한 변의 길이가 4인 정삼각형의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4^2 = 4\sqrt{3}$$

$$1 \text{회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는 } 4\sqrt{3} \cdot \frac{3}{4}$$

2회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$$4\sqrt{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = 4\sqrt{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$\vdots$

$$n \text{회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는 } 4\sqrt{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

따라서 10회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$$4\sqrt{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

120. [정답] $\frac{\sqrt{2}}{2}$

주어진 정사각형의 넓이가 8이므로 한 변의 길이는

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

첫 번째 그린 정사각형 T_1 의 한 변의 길이는

$$\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$$

두 번째 그린 정사각형 T_2 의 한 변의 길이는

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

세 번째 그린 정사각형 T_3 의 한 변의 길이는

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$$

⋮

따라서 n 번째 그린 정사각형 T_n 의 한 변의 길이는

$$2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

121. [정답] ②

한 변의 길이가 3인 정사각형의 넓이가 9이므로

첫 번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는 $9 \cdot \frac{8}{9} = 8$

두 번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는 $8 \cdot \frac{8}{9}$

⋮

n 번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는 $8 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}$

따라서 20 번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는

$$8 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{20-1} = \frac{8^{20}}{9^{19}} = \frac{(2^3)^{20}}{(3^2)^{19}} = \frac{2^{60}}{3^{38}}$$

122. [정답] ④

$$\cos 45^\circ = \frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{OP_1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ 이므로}$$

$$\overline{P_1P_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{OP_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\overline{P_2P_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{P_1P_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

⋮

$$\overline{P_nP_{n+1}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{10} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{20} \text{ 에서 } n=20$$

따라서 구하는 선분은 $\overline{P_{20}P_{21}}$ 이다.

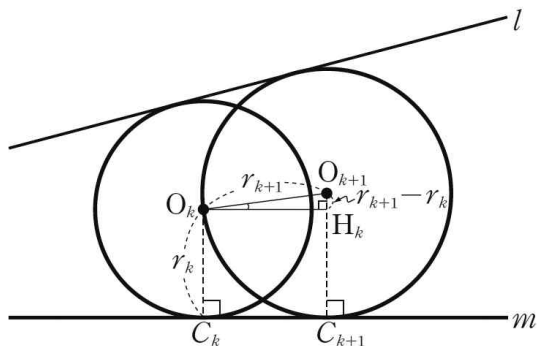
123. [정답] 1023

① 단계	두 원 C_k, C_{k+1} 의 반지름의 길이를 각각 r_k, r_{k+1} 이라 하고, 수열 $\{r_k\}$ 가 등비수열임을 이해한다.
② 단계	r_k 와 S_k 의 관계에서 수열 $\{S_k\}$ 도 등비수열임을 이해한다.
③ 단계	S_k 에서 S_{2k-1} 을 구하고 등비수열의 합의 공식을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

다음 그림과 같이 원 C_k 의 반지름의 길이를 r_k , 중심을 O_k , 넓이를 S_k 라 하면 원 C_{k+1} 의 반지름의 길이는 r_{k+1} , 중심은 O_{k+1} , 넓이는

S_{k+1} 이다.

점 O_k 에서 점 O_{k+1} 을 지나면서 직선 m 에 수직인 선분에 내린 수선의 발을 H_k 라 하자.



$\sin(\angle O_{k+1} O_k H_k)$ 의 값은 k 의 값에 관계없이 항상 일정하므로 그 값을 p (p 는 상수)라 하면

$$\frac{r_{k+1} - r_k}{r_{k+1}} = p \text{ 에서 } r_{k+1} = \frac{1}{1-p} r_k (\because p \neq 1)$$

즉, 수열 $\{r_k\}$ 는 공비가 $\frac{1}{1-p}$ 인 등비수열이므로 수열 $\{S_k\}$ 는 공

비가 $\left(\frac{1}{1-p}\right)^2$ 인 등비수열이고, $S_1 = 1$ 이므로 일반항 S_n 은

$$S_n = \left\{\left(\frac{1}{1-p}\right)^2\right\}^{n-1} \text{ 이다.}$$

이때, $S_5 = 4$ 이므로 $S_5 = \left\{\left(\frac{1}{1-p}\right)^2\right\}^4 = 4$ 에서

$$\left\{\left(\frac{1}{1-p}\right)^2\right\}^2 = 2 \quad \therefore \left(\frac{1}{1-p}\right)^2 = \sqrt{2}$$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 1이고 공비가 $\sqrt{2}$ 인 등비수열이

므로 수열 $\{S_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 1이고 공비가 $(\sqrt{2})^2 = 2$ 인 등비수열이 된다.

$$\therefore S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{19} = \frac{1 \times (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 1023$$

124. [정답] ⑤

[출제외도] 등비수열의 합을 이용하여 도형 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$a_1 = 1 + \frac{1}{3} \times 2 = 1 + \frac{2}{3},$$

$$a_2 = a_1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 2^2 = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

$$a_3 = a_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 2^3 = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3,$$

...

$$\therefore a_{20} = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{20}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{21}}{1 - \frac{2}{3}} = 3 \left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{21}\right\}$$

125. [정답] ③

A 도시의 올해 인구를 a , 인구의 증가율을 r 라 하면 n 년 후의 인구는

$$a(1+r)^n \text{ (명)}$$

10년 후의 인구가 36만 명이므로

$$a(1+r)^{10} = 3.6 \times 10^5 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

20년 후의 인구가 81만 명이므로

$$a(1+r)^{20} = 8.1 \times 10^5 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{8} \div \textcircled{7} \text{을 하면 } (1+r)^{10} = \frac{9}{4} \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$$\therefore (1+r)^5 = \frac{3}{2}$$

$$\textcircled{9} \text{을 } \textcircled{7} \text{에 대입하면 } \frac{9}{4}a = 3.6 \times 10^5$$

$$\therefore a = 1.6 \times 10^5$$

따라서 15년 후의 인구는

$$a(1+r)^{15} = 1.6 \times 10^5 \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 5.4 \times 10^5 \text{ (명)}$$

이므로 54만 명으로 예상할 수 있다.

126. [정답] 64

처음 빛의 양을 A 라 하면 n 장의 유리를 통과한 후의 빛의 양은

$$A\left(\frac{4}{5}\right)^n \text{ 이므로 두 장의 유리를 통과한 후의 빛의 양은}$$

$$A \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = A \cdot \frac{16}{25} = A \cdot \frac{64}{100}$$

따라서 두 장의 유리를 통과한 후의 빛의 양은 처음 빛의 양의 64%이다.

127. [정답] 2:1

처음 식염수의 농도를 a 라 하면 A, B가 p 번, q 번 반복하여 얻은 식

$$\text{염수의 농도는 각각 } a\left(\frac{1}{2}\right)^p, a\left(\frac{1}{4}\right)^q$$

$$a\left(\frac{1}{2}\right)^p = a\left(\frac{1}{4}\right)^q \text{ 에서 } p=2q$$

$$\therefore p:q=2:1$$

128. [정답] ④

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$a_3 = a_1 r^2 = 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_7 = a_1 r^6 = 24 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r^4 = 4$$

$$r \text{은 실수이므로 } r^2 = 2$$

$$\text{이것을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 2a_1 = 6 \quad \therefore a_1 = 3$$

따라서 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{10}^2$ 은 첫째항이 $a_1^2 = 9$, 공비가

$r^2 = 2$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 10항까지의 합과 같으므로

$$\text{(주어진 식)} = \frac{9(2^{10}-1)}{2-1} = 9(2^{10}-1)$$

129. [정답] 21

일반항이 $a_n = 2^{2n-1}$ 이므로

$$a_1 = 2, a_2 = 2^3, a_3 = 2^5, \dots, a_{10} = 2^{19}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 4인 등비수열이므로

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} &= \frac{2(4^{10}-1)}{4-1} = \frac{2(2^{20}-1)}{3} \\ &= \frac{2^{21}-2}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore p = 21$$

130. [정답] ②

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하자.

첫째항부터 제 5항까지의 합이 $\frac{31}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 &= a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 \\ &= a(1+r+r^2+r^3+r^4) \\ &= \frac{31}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

첫째항부터 제 5항까지의 곱이 32이므로

$$\begin{aligned} a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 &= a \times ar \times ar^2 \times ar^3 \times ar^4 \\ a^5 r^{10} &= (ar^2)^5 = 32 \end{aligned}$$

$$\therefore ar^2 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\therefore \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5}$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{1}{ar} + \frac{1}{ar^2} + \frac{1}{ar^3} + \frac{1}{ar^4}$$

$$= \frac{1}{ar^4} (1+r+r^2+r^3+r^4)$$

$$= \frac{1}{(ar^2)^2} \times a(1+r+r^2+r^3+r^4)$$

$$= \frac{1}{2^2} \times \frac{31}{2} (\because \textcircled{1}, \textcircled{2})$$

$$= \frac{31}{8}$$

131. [정답] ②

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1} = 30 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_{2n} = \frac{a(r^{2n}-1)}{r-1} = \frac{a(r^n-1)(r^n+1)}{r-1} = 50 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면}$$

$$r^n + 1 = \frac{5}{3} \quad \therefore r^n = \frac{2}{3}$$

$$\therefore S_{3n} = \frac{a(r^{3n}-1)}{r-1} = \frac{a(r^n-1)(r^{2n}+r^n+1)}{r-1}$$

$$= 30 \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} + 1 \right\}$$

$$= 30 \cdot \frac{19}{9} = \frac{190}{3}$$

132. [정답] ①

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하고

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = S_{10}$ 이라 하면

$$a_{21} + a_{22} + a_{23} + \dots + a_{30} = a_1 r^{20} + a_2 r^{20} + a_3 r^{20} + \dots + a_{10} r^{20}$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}) r^{20}$$

$$= S_{10} r^{20}$$

이때, $S_{10} = 50\sqrt{2}$, $S_{10} r^{20} = 450\sqrt{2}$ 이므로

$$r^{20} = \frac{S_{10} r^{20}}{S_{10}} = \frac{450\sqrt{2}}{50\sqrt{2}} = 9, (r^{10})^2 = 9$$

$$\therefore r^{10} = 3 (\because r^{10} > 0)$$

$$\therefore a_{11} + a_{12} + a_{13} + \dots + a_{20}$$

$$= a_1 r^{10} + a_2 r^{10} + a_3 r^{10} + \dots + a_{10} r^{10}$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}) r^{10} = S_{10} r^{10}$$

$$= 50\sqrt{2} \times 3 = 150\sqrt{2}$$

133. [정답] ⑤

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$\frac{a(r^3-1)}{r-1} = 21 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{a(r^6-1)}{r-1} = \frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1} = -147 \quad \dots \textcircled{2}$$

② ÷ ①을 하면

$$r^3 + 1 = -7, r^3 = -8$$

$$\therefore r = -2$$

$r = -2$ 를 ①에 대입하여 정리하면

$$3a = 21 \quad \therefore a = 7$$

따라서 $a_n = 7 \cdot (-2)^{n-1}$ 이므로 $a_5 = 7 \cdot (-2)^4 = 112$

134. [정답] $a_n = 3 \times (-2)^{n-1}$ 또는 $a_n = -2^{n-1}$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하자.

첫째항부터 제 4항까지의 합은

$$\frac{a(1-r^4)}{1-r} = -15 \quad \dots \textcircled{1}$$

첫째항부터 제 8항까지의 합은

$$\frac{a(1-r^8)}{1-r} = -255 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } \frac{a(1-r^8)}{1-r} = \frac{a(1-r^4)(1+r^4)}{1-r} = -255 \text{ 이므로}$$

$$-15(1+r^4) = -255 (\because \textcircled{1}), 1+r^4 = 17$$

$$r^4 = 16, r^2 = 4 (\because r \text{는 실수})$$

$$\therefore r = \pm 2$$

이때, ①에서 $r = -2$ 일 때 $a = 3$, $r = 2$ 일 때 $a = -1$ 이다.

따라서 구하는 일반항 a_n 은

$$a_n = 3 \times (-2)^{n-1} \text{ 또는 } a_n = (-1) \times 2^{n-1} = -2^{n-1}$$

단계	채점 기준	배점
㉠	등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하고, $S_4 = -15$, $S_8 = -255$ 를 a , r 에 대한 식으로 나타낸 경우	40%
㉡	㉠에서 구한 식을 연립하여 r 의 값을 구한 경우	40%
㉢	r 의 값에 따른 일반항 a_n 을 구한 경우	20%

135. [정답] ①

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$= a + ar + ar^2 = 21 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$S_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$$

$$= a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5$$

$$= a + ar + ar^2 + r^3(a + ar + ar^2)$$

$$= (1+r^3)(a + ar + ar^2) = 189 \quad \dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$21(1+r^3) = 189, 1+r^3 = 9$$

$$r^3 - 8 = 0, (r-2)(r^2+2r+4) = 0$$

$$\therefore r = 2 (\because r \text{는 실수})$$

136. [정답] $\frac{1}{2}$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = \frac{a_1(r^{10}-1)}{r-1} = 12 \quad \dots \textcircled{1}$$

수열 $a_1, a_3, a_5, \dots$ 의 공비는 r^2 이므로

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = \frac{a_1\{(r^2)^5-1\}}{r^2-1}$$

$$= \frac{a_1(r^{10}-1)}{r^2-1} = 8 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \div \textcircled{2} \text{을 하면 } \frac{r^2-1}{r-1} = \frac{3}{2}$$

$$r+1 = \frac{3}{2} \quad \therefore r = \frac{1}{2}$$

137. [정답] $\sqrt{2}$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_{10} = \frac{a_1(r^{10}-1)}{r-1} = 20 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_{11} + a_{12} + \dots + a_{20} = S_{20} - S_{10} \text{ 이므로}$$

$$S_{20} = S_{10} + 640 = 660$$

$$\begin{aligned}\therefore S_{20} &= \frac{a_1(r^{20}-1)}{r-1} \\ &= \frac{a_1(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1} = 660 \dots\dots \textcircled{C}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{C} \div \textcircled{A} \text{을 하면 } r^{10}+1 &= 33, \quad r^{10}=32 \\ \therefore r &= \sqrt[10]{32} \quad (\because r > 0)\end{aligned}$$

138. [정답] 4

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$\begin{aligned}a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2k} \\ &= r + r^3 + r^5 + \dots + r^{2k-1} \\ &= \frac{r\{(r^2)^k - 1\}}{r^2 - 1} = \frac{r(r^{2k} - 1)}{r^2 - 1} = 170 \dots\dots \textcircled{A}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2k-1} \\ &= 1 + r^2 + r^4 + \dots + r^{2k-2} \\ &= \frac{1\{(r^2)^k - 1\}}{r^2 - 1} = \frac{r^{2k} - 1}{r^2 - 1} = 85 \dots\dots \textcircled{B}\end{aligned}$$

$$\textcircled{A} \div \textcircled{B} \text{을 하면 } r = \frac{170}{85} = 2$$

$$r=2 \text{를 } \textcircled{B} \text{에 대입하면 } \frac{4^k - 1}{4 - 1} = 85$$

$$4^k - 1 = 255, \quad 4^k = 256 \quad \therefore k = 4$$

139. [정답] -6

$S_n = 2 \cdot 3^{n+1} + k$ 에서

i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2 \cdot 3^2 + k = 18 + k \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} = 2 \cdot 3^{n+1} + k - (2 \cdot 3^n + k) \\ &= 2 \cdot 3^n(3 - 1) = 4 \cdot 3^n \quad \dots\dots \textcircled{B}\end{aligned}$$

이 때 이 수열이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 $\textcircled{A}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 $\textcircled{B}$ 이 같아야 하므로

$$12 = 18 + k \quad \therefore k = -6$$

140. [정답] 256

$$a_9 = S_9 - S_8 = (2^9 - 1) - (2^8 - 1) = 256$$

141. [정답] 504

$S_n = 5^n - 1$ 이므로

$$a_1 = 5^1 - 1 = 4$$

$$a_4 = S_4 - S_3 = (5^4 - 1) - (5^3 - 1) = 500$$

$$\therefore a_1 + a_4 = 504$$

142. [정답] ⑤

$S_n = 2^n - 1$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2^n - 1) - (2^{n-1} - 1) \\ &= 2 \times 2^{n-1} - 2^{n-1} = 2^{n-1}\end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2^1 - 1 = 1$$

(i), (ii)에서 $a_1 = 1, a_n = 2^{n-1} (n=2, 3, 4, \dots)$

$$\begin{aligned}\therefore a_1 + a_5 + a_9 &= 1 + 2^4 + 2^8 \\ &= 1 + 16 + 256 = 273\end{aligned}$$

143. [정답] ②

$S_n + 100 = 10^{n+2}$ 에서 $S_n = 10^{n+2} - 100$

i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 10^3 - 100 = 900$$

ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 10^{n+2} - 100 - (10^{n+1} - 100) \\ &= 10^{n+1}(10 - 1) = 9 \cdot 10^{n+1} \quad \dots\dots \textcircled{A}\end{aligned}$$

이때 $a_1 = 900$ 은 $\textcircled{A}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 9 \cdot 10^{n+1}$$

따라서 $p=9, q=10$ 이므로

$$p - q = -1$$

144. [정답] 682

$S_n = 2 \cdot 3^{n+1} + k$

i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2$$

ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} = (2^{n+1} - 2) - (2^n - 2) \\ &= 2^n \quad \dots\dots \textcircled{A}\end{aligned}$$

이때 $a_1 = 2$ 는 $\textcircled{A}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 2^n$$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 2 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^9$$

$$\begin{aligned}&= \frac{2\{(2^2)^5 - 1\}}{2^2 - 1} \\ &= 682\end{aligned}$$

145. [정답] ⑤

$a_n = 1 + (n-1) \cdot 2$ 이므로

$$b_n = 2^{1+(n-1) \cdot 2} = 2^1 \cdot (2^2)^{n-1} = 2 \cdot 4^{n-1}$$

따라서 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 4인 등비수열이다.

146. [정답] ③

$$\neg. \frac{a_n}{2} = \frac{2^{3n+1}}{2} = 2^{3n} = 8^n$$

따라서 수열 $\left\{\frac{a_n}{2}\right\}$ 은 첫째항이 8, 공비가 8인 등비수열이다.

$\sqcup. a_n = 2^{3n+1} = 2^{4+3n-3} = 2^4 \cdot 2^{3(n-1)} = 16 \cdot 8^{n-1}$ 에서
수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 16, 공비가 8인 등비수열이므로

$$S_n = \frac{16(8^n - 1)}{8 - 1} = \frac{16}{7}(8^n - 1)$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n - \frac{a_n}{14} &= \frac{16}{7}(8^n - 1) - \frac{16 \cdot 8^{n-1}}{14} \\ &= \frac{15}{7} \cdot 8^n - \frac{16}{7} \end{aligned}$$

따라서 수열 $\left\{S_n - \frac{a_n}{14}\right\}$ 은 등비수열이 아니다.

$\sqsubset. 7S_n = 16(8^n - 1) = 16 \cdot 8^n - 16 = 8a_n - 16 = 8(a_n - 2)$
이상에서 옳은 것은 $\neg, \sqsubset$ 이다.

147. [정답] $\frac{27}{8}(9^8 - 1)$

$a_n = 3 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 1$ 이므로

$$3^{a_n} = 3^{2n+1} = 3^{2n-2+3} = 3^3 \cdot 3^{2(n-1)} = 27 \cdot 9^{n-1}$$

따라서 수열 $\{3^{a_n}\}$ 은 첫째항이 27, 공비가 9인 등비수열이므로 첫
째항부터 제8항까지의 합은

$$\frac{27(9^8 - 1)}{9 - 1} = \frac{27}{8}(9^8 - 1)$$

148. [정답] ⑤

2014년에 감염된 환자의 수를 a 라 하고, 매년 에이즈에 감염되는
환자의 수가 전년도에 감염된 환자의 수의 r 배라 하면 2014년부터
2033년까지 발생한 환자의 수는

$$a + ar + \dots + ar^{19} = \frac{a(1-r^{20})}{1-r} = 500000 \quad \cdots \textcircled{1}$$

또, 2024년부터 2033년까지 발생한 환자의 수는

$$ar^{10} + ar^{11} + \dots + ar^{19} = \frac{ar^{10}(1-r^{10})}{1-r} = 1000000$$

$\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ 을 하면

$$\frac{1-r^{20}}{r^{10}(1-r^{10})} = \frac{(1+r^{10})(1-r^{10})}{r^{10}(1-r^{10})} = 5$$

$$\frac{1+r^{10}}{r^{10}} = 5, \quad 1+r^{10} = 5r^{10} \quad \therefore r^{10} = \frac{1}{4}$$

따라서 2034년에 발생한 환자의 수는

$$ar^{20} = a(r^{10})^2 = a \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}a$$

이므로 2014년에 발생한 환자의 수의 $\frac{1}{16}$ 이다.

149. [정답] ②

연구비를 매년 r 배 증액한다고 하면 2018년의 연구비는 $10^9 r^4$ 원 이
므로

$$10^9 r^4 = 4 \cdot 10^9, \quad r^4 = 4 \quad \therefore r = \sqrt{2} \quad (\because r > 0)$$

따라서 구하는 연구비의 총액은

$$\begin{aligned} \frac{10^9(r^5 - 1)}{r - 1} &= \frac{10^9(r^4 \cdot r - 1)}{r - 1} = \frac{10^9(4\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} - 1} \\ &= \frac{10^9(4\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} \\ &= 10^9(7 + 3\sqrt{2}) \\ &\approx 112 \times 10^8 \end{aligned}$$

이므로 112억 원이다.

150. [정답] ④

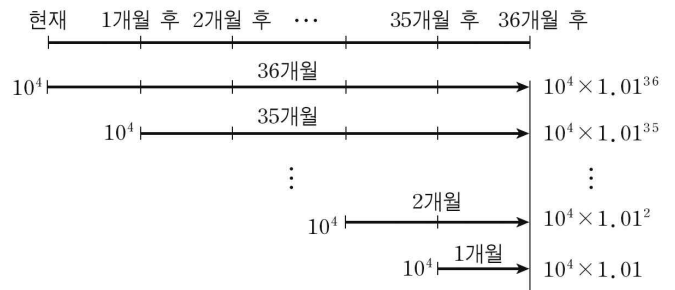
적립하는 일정한 금액을 a 원이라 하면 3년 후의 원리합계는

$$\begin{aligned} \frac{a \times 1.05(1.05^3 - 1)}{1.05 - 1} &= \frac{a \times 1.05(1.16 - 1)}{0.05} \\ &= 4200000 \end{aligned}$$

$$\therefore a = \frac{4200000 \times 0.05}{1.05 \times 0.16} = 125 \text{ (만 원)}$$

151. [정답] 404000 원

매월 초에 적립하는 10000 원의 원리합계를 그림으로 나타내면 다
음과 같다.



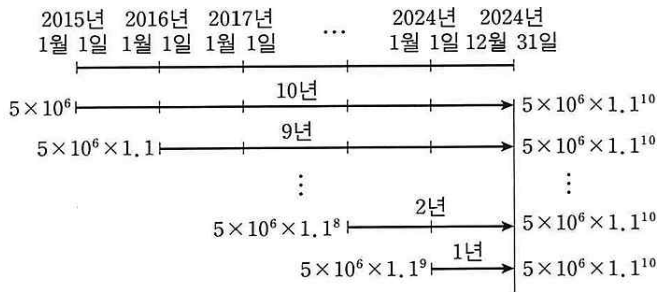
3년 후의 적립금의 원리합계를 S 라 하면

$S =$

$$\begin{aligned} &10000(1+0.01) + 10000(1+0.01)^2 + \dots + 10000(1+0.01)^{36} \\ &= \frac{10000 \times 1.01 \{(1+0.01)^{36} - 1\}}{(1+0.01) - 1} \\ &= \frac{10000 \times 1.01 \times (1.4 - 1)}{0.01} \end{aligned}$$

152. [정답] 1억 3천만 원

매년 초에 적립하는 금액의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



2024년 12월 31일까지 적립한 금액의 원리합계를 S 라 하면
 $S = 5 \times 10^6 \times 1.1^{10} \times 10 = 5 \times 1.1^{10} \times 10^7$
 $= 5 \times 2.6 \times 10^7 = 13 \times 10^7$ (원) = 1억 3천만 원

153. [정답] ③

이달 말부터 a 만 원씩 갚는다고 하면 갚는 금액의 12개월 후의 원리합계는

$$a + a \times 1.015 + \dots + a \times 1.015^{11}$$

$$= \frac{a(1.015^{12} - 1)}{1.015 - 1} = \frac{a(1.2 - 1)}{0.015} = \frac{0.2a}{0.015} = \frac{40}{3}a \text{ (만 원)} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편, 20만 원의 12개월 후의 원리합계는

$$20 \times 1.015^{12} = 20 \times 1.2 = 24 \text{ (만 원)} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①과 ②이 같아야 하므로 $\frac{40}{3}a = 24 \quad \therefore a = \frac{9}{5} = 1.8$ (만 원)

따라서 매달 18000 원씩 갚아야 한다.

154. [정답] ②

매년 말에 500만 원씩 10년 동안 연이율 5%의 복리로 적립한 금액의 원리합계는

$$500 + 500 \times 1.05 + \dots + 500 \times 1.05^9$$

$$= \frac{500(1.05^{10} - 1)}{1.05 - 1} = \frac{500(1.63 - 1)}{0.05}$$

$$= 6300 \text{ (만 원)} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한꺼번에 현금 a 만 원을 받는다면 10년 동안 연이율 5%의 복리로 적립한 원리합계는

$$a \times 1.05^{10} = 1.63a \text{ (만 원)} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①과 ②이 같아야 하므로 $6300 = 1.63a$

$$\therefore a = \frac{6300}{1.63} \approx 3865 \text{ (만 원)}$$

155. [정답] 2160만 원

1억 8천만 원의 12년 후의 원리합계는

$$18000 \times 1.06^{12} = 36000 \text{ (만 원)} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

매년 말에 a 만 원씩 12년 동안 연이율 6%의 복리로 적립한 원리합계는

$$a + a \times 1.06 + \dots + a \times 1.06^{11}$$

$$= \frac{a(1.06^{12} - 1)}{1.06 - 1} = \frac{a(2 - 1)}{0.06} = \frac{50}{3}a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①과 ②이 같아야 하므로 $36000 = \frac{50}{3}a$

$$\therefore a = 2160 \text{ (만 원)}$$

156. [정답] 35만 원

갚아야 할 1000만 원의 36개월 후의 원리합계는

$$1000 \times 1.01^{36} = 1000 \times 1.4$$

$$= 1400 \text{ (만 원)} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

매달 a 만 원씩 갚는다고 하면 36개월 후의 원리합계는

$$a + a \times 1.01 + \dots + a \times 1.01^{35}$$

$$= \frac{a(1.01^{36} - 1)}{1.01 - 1} = \frac{a(1.4 - 1)}{0.01}$$

$$= 40a \text{ (만 원)} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①과 ②이 같아야 하므로 $1400 = 40a$

$$\therefore a = \frac{1400}{40} = 35 \text{ (만 원)}$$

따라서 매달 35만 원씩 갚아야 한다.